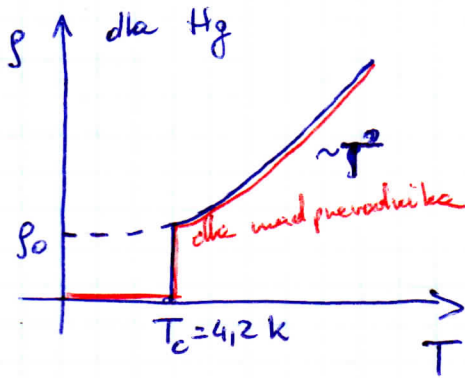


Przegląd Caspasa

NADPRZEWODNICTWO



Na podstawie klasycznej teorii przewodnictwa w metalach Drudego

$$\sigma = \frac{ne^2}{m} \tau$$

↑ przewodnictwo ↑ średni czas swobodnego ruchu pomiędzy kolejnymi zderzeniami.

Zatem

$$\rho = \frac{m}{ne^2} \left(\frac{1}{\tau_{imp}} + \frac{1}{\tau_{el-el}} + \frac{1}{\tau_{el-ph}} \right) =$$

↑ opór wstęgowy ↑ rozpraszanie na defektach (niezależne od T) ↑ rozpraszanie elektron-elektron $\propto T^2$ ↑ rozpraszanie fonon-elektron $\propto T^2$

$$= \rho_0 + aT^2 + \dots \leftarrow \text{dla metalu.}$$

Pierwsze obserwacje

Kammerling Onnes w 1911 roku zaobserwował zanik oporu w wstęgowej dla rtęci przy temp. 4,2 K.

Pierwsze

Metel	temp. krytyczna T _c
Al	1,2 K
Hg	4,2 K
Nb	9,3 K
Pb	7,2 K
⋮	⋮

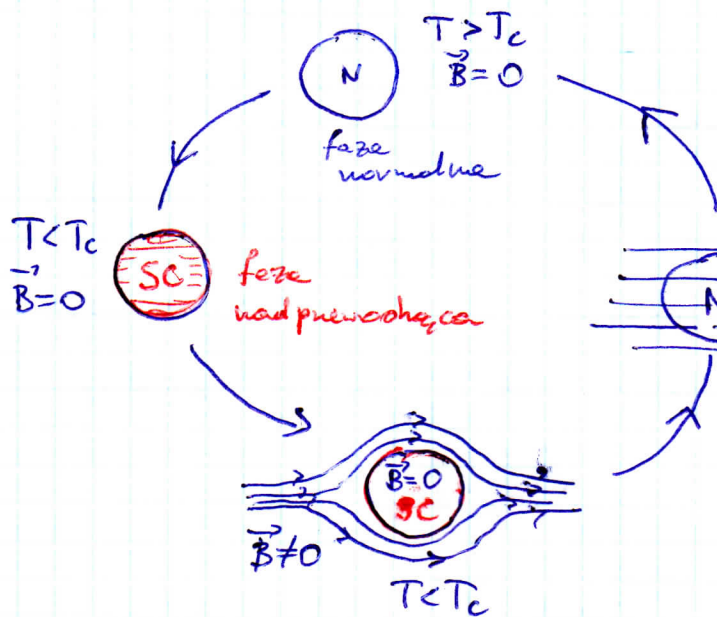
Własność ta nadprzewodników nazywa się idealnym przewodnictwem.

Bednorz Müller (1986) odkrycie nadprzewodników wysokiego temperatury.

$\text{La}_{2-x}\text{Ba}_x\text{CuO}_4$	38 K (x=0,15)
YBaCu_3O_7	92 K

← nadprzewodzące już w ułtym azocie!

Efekt Meissnera (1933)



Nadprzewodniki wypychają pole magnetyczne z ich wnętrza, czyli są idealnymi diamagnetykami. (lewitacja nadprzewodnika nad magnesem kwadrupolowym)

1) PARY COOPERA (L. Cooper, Phys. Rev. 104 (1956))

Rozważyc parę elektronów znajdujących się powyżej poziomu Fermiego, której hamiltonian jest postaci:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla_{\vec{R}}^2 - \frac{\hbar^2 \nabla_{\vec{r}}^2}{2\mu} + V(\vec{r}),$$

gdzie \vec{R} jest współrzędną środka masy parę elektronów, \vec{r} jest współrzędną względną parę, $m^* = 2m_e$, $\mu = \frac{m_e}{2}$ oraz oddziaływanie $V(\vec{r})$ może być efektywnie przyciągające. Znaleźć energię własną w tym zagadnieniu.

Rozwiązanie:

Dwu cząstkowa funkcja falowa parę elektronów:

$$\psi(\vec{r}_1, \sigma_1; \vec{r}_2, \sigma_2) = e^{i\vec{K} \cdot \vec{R}} \underbrace{\varphi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}_{\substack{\text{separacja} \\ \text{między} \\ \text{środku}}} \chi_{\sigma_1 \sigma_2}^{\text{spin}}$$

środku masy.

wprowadzamy $\tilde{E} = E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$

↑
energia własna

Najmniejsza energia E odpowiada sytuacji $\vec{k} = 0$.
(środek masy się nie porusza).

Można mieć spinowa funkcji falowej może być
singletowa (S=0) lub trypletowa (S=1):

$\chi_{\sigma_1 \sigma_2}^{\text{spin}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$ spin (singlet).
↑ ze zwojonej

$\chi_{\sigma_1 \sigma_2}^{\text{spin}} = \begin{cases} |\uparrow\uparrow\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |\downarrow\downarrow\rangle \end{cases}$ (tryplet)
możliwe jest nadpoważenie trypletowe

Funkcje falowa dla elektronów musi być antysymetryczna
czyli antysymetrycznej części spinowej (singlet) odpowiada symetrycznej
części przestrzennej $\varphi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = +\varphi(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$. Symetrycznej
części spinowej (tryplet) odpowiada antysymetrycznej
części przestrzennej.

Badujemy rozważać sytuację z singletową częścią
spinową (gdyż ze zwojonej odpowiadają jej niższe
energje własne).

Funkcja falowa możemy zapisać jako kombinację
funkcji liniową funkcji Blocha:

$\varphi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \sum_{\vec{k}} \varphi_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}$, ($\varphi_{\vec{k}} = \varphi_{-\vec{k}}$)

wtedy:

$\psi(\vec{r}_1, \sigma_1; \vec{r}_2, \sigma_2) = \sum_{\vec{k}} \varphi_{\vec{k}} \begin{vmatrix} \varphi_{\vec{k}}(\vec{r}_1) \uparrow_1 & \varphi_{\vec{k}}(\vec{r}_1) \downarrow_1 \\ \varphi_{\vec{k}}(\vec{r}_2) \uparrow_2 & \varphi_{-\vec{k}}(\vec{r}_2) \downarrow_2 \end{vmatrix} =$

-3- ↑ wyznacznik słabego.

$$= \sum_{\vec{k}} \varphi_{\vec{k}} \left(\varphi_{\vec{k}}(\vec{r}_1) \uparrow_1 \varphi_{-\vec{k}}(\vec{r}_2) \downarrow_2 - \varphi_{\vec{k}}(\vec{r}_1) \downarrow_1 \varphi_{-\vec{k}}(\vec{r}_2) \uparrow_2 \right) =$$

$$= \sum_{\vec{k}} \varphi_{\vec{k}} \left[e^{i\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \uparrow_1 \downarrow_2 - e^{+i\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \downarrow_1 \uparrow_2 \right] =$$

$$\left\{ \varphi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right\}$$

$$= \sum_{\vec{k}} \varphi_{\vec{k}} e^{i\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \left[\uparrow_1 \downarrow_2 - \downarrow_1 \uparrow_2 \right]$$

↑
nie istotna dla
naszego przypadku

Wstawiając $\varphi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \varphi_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ do hamiltonianu dostajemy:

$$E \varphi(\vec{r}) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \varphi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \varphi(\vec{r})$$

Wprowadzamy: $\varphi_{\vec{k}} = \int d^3\vec{r} \varphi(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}$

Wstawiając to do hamiltonianu mamy:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \varphi_{\vec{k}} + V(\vec{r}) \varphi_{\vec{k}} = E \varphi_{\vec{k}}$$

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} k^2 \varphi_{\vec{k}} + \int V(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} = E \varphi_{\vec{k}}$$

Niech $\epsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}$:

$$\int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} V(\vec{q}) \int d^3\vec{r} \varphi(\vec{r}) e^{-i(\vec{E} - \vec{q}) \cdot \vec{r}} = (E - 2\epsilon_{\vec{k}}) \varphi_{\vec{k}}$$

$$\int \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3} V_{\vec{k}\vec{k}'} \varphi_{\vec{k}'} = (E - 2\epsilon_{\vec{k}}) \varphi_{\vec{k}}$$

w przypadku elastycznego rozpręgnięcia powłok elektronami:

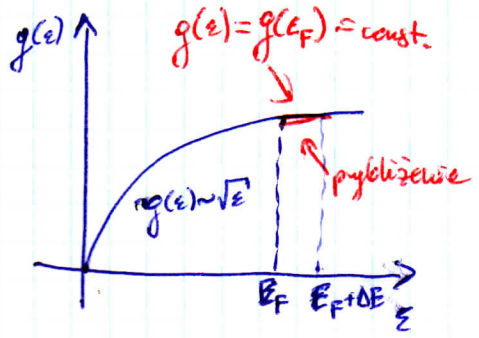
$$V_{\vec{k}\vec{k}'} = \begin{cases} -g & E_F < \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}, \frac{\hbar^2 k'^2}{2m_e} < E_F + \Delta E \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

$$(E - 2\varepsilon_{\vec{n}}) \varphi_{\vec{n}} = - \frac{g}{V} \sum_{\vec{n}'} \varphi_{\vec{n}'}$$

wyprowadzamy $\sum_{\vec{n}'} \varphi_{\vec{n}'} = C$:

$$(E - 2\varepsilon_{\vec{n}}) \varphi_{\vec{n}} = - \frac{g}{V} C$$

$$C = \sum_{\vec{n}} \varphi_{\vec{n}} = - \frac{g}{V} C \sum_{\vec{n}} \frac{1}{E - 2\varepsilon_{\vec{n}}}$$



$$1 = \frac{1}{2} \int_{E_F}^{E_F + \Delta E} d\varepsilon g(\varepsilon) \frac{g d\varepsilon}{2\varepsilon - E} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{E_F}^{E_F + \Delta E} d\varepsilon g(E_F) \frac{g}{2\varepsilon - E} =$$

$$= \frac{g g(E_F)}{2} \ln \left(\frac{2E_F + 2\Delta E - E}{2E_F - E} \right) =$$

$$= \frac{g g(E_F)}{2} \ln \left(\frac{2\Delta E - \varepsilon_b}{1 - \varepsilon_b} \right)$$

$E = 2E_F + \varepsilon_b$
 ε_b energia wiązania pary.

$$\frac{2\Delta E - \varepsilon_b}{-\varepsilon_b} = e^{2/gg(E_F)}$$

$$2\Delta E = \varepsilon_b \left(1 + e^{2/gg(E_F)} \right)$$

$$\varepsilon_b = \frac{2\Delta E}{1 + e^{2/gg(E_F)}} \xrightarrow{\frac{g}{E_F} \rightarrow 0} -2\Delta E e^{-2/gg(E_F)}$$

Energia wiązania pary: dla dowolnie małego g .

$$\varepsilon_b \approx -2\Delta E e^{-2/gg(E_F)} < 0$$

gdzie $\Delta E = \hbar\omega_D$
 ω_D częstość Debye'a

elektryczny stan związany p parę Coopera.

ny ciążące oddziaływanie między elektronami powyżej poziomu Fermiego w przedziale $E_F < E < E_F + \hbar\omega_D$ energii par Coopera jest mniejsze niż elektronów w jego wnętrzu, co powoduje niestabilność morza Fermiego.

Funkcja falowa BCS: (Bardeen, Cooper, Schrieffer; Phys. Rev. 105 (1957))

~~$|\Psi\rangle = \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^+ c_{-\mathbf{k}\downarrow}^+) |\Phi\rangle$~~

parametry wierzajine

$|\Psi_{BCS}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^+ c_{-\mathbf{k}\downarrow}^+) |0\rangle$

alternans sie wtedy more Fermiego

$$v_{\mathbf{k}} = \begin{cases} 1 & \text{dla } |\mathbf{k}| \leq k_F \\ 0 & \text{dla } |\mathbf{k}| > k_F \end{cases}$$

$$u_{\mathbf{k}} = \begin{cases} 0 & \text{dla } |\mathbf{k}| \leq k_F \\ 1 & \text{dla } |\mathbf{k}| > k_F \end{cases}$$

↑ stan próżni
funkcje falowe zwrócone w sobie $|\Phi\rangle$

2) Sprawdzić relacje komutacyjne dla par Coopera.
Operator kreacji pary Coopera:

$b_{\mathbf{k}}^+ \equiv c_{\mathbf{k}\uparrow}^+ c_{-\mathbf{k}\downarrow}^+$, $b_{\mathbf{k}} = c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow}$

$[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}] = 0 = [b_{\mathbf{k}}^+, b_{\mathbf{k}'}^+]$

$[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^+] = b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'}^+ - b_{\mathbf{k}'}^+ b_{\mathbf{k}} =$

$= c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} c_{\mathbf{k}\uparrow}^+ c_{-\mathbf{k}\downarrow}^+ - c_{\mathbf{k}\uparrow}^+ c_{-\mathbf{k}\downarrow}^+ c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} =$

~~$c_{\mathbf{k}\uparrow}^+ c_{-\mathbf{k}\downarrow}^+ c_{\mathbf{k}\uparrow} c_{-\mathbf{k}\downarrow}$~~ - ~~$c_{\mathbf{k}\uparrow}^+ c_{-\mathbf{k}\downarrow}^+ c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow}$~~

~~$c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^+ c_{\mathbf{k}\uparrow}^+ + c_{\mathbf{k}\uparrow}^+ c_{-\mathbf{k}\downarrow}^+ c_{\mathbf{k}\uparrow} c_{-\mathbf{k}\downarrow}$~~

~~$\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} - \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} = 0$~~

$$= c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} c_{k'\uparrow}^+ c_{-k'\downarrow}^+ - c_{k'\uparrow}^+ c_{-k'\downarrow}^+ c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} =$$

$$\delta_{kk'} - c_{k'\uparrow}^+ c_{k\uparrow} \quad \delta_{kk'} - c_{-k\downarrow} c_{-k'\downarrow}^+$$

$$= c_{-k\downarrow} c_{-k'\downarrow}^+ \delta_{kk'} - c_{-k\downarrow} c_{k'\uparrow}^+ c_{k\uparrow} c_{-k'\downarrow}^+ - c_{k'\uparrow}^+ c_{k\uparrow} \delta_{kk'} +$$

$$+ c_{k'\uparrow}^+ c_{-k\downarrow} c_{-k'\downarrow}^+ c_{k\uparrow} =$$

$$= (1 - c_{-k\downarrow} c_{-k\downarrow} - c_{k\uparrow}^+ c_{k\uparrow}) \delta_{kk'}$$

Pany Coopera nie są ani bozonami, ani fermionami!

Wyprowadzić hamiltonianu Fröhlicha

HAMILTONIAN FRÖHLICHA

Wyprowadzić hamiltonianu opisujący oddziaływanie pomiędzy elektronami i fononami, który będzie kluczowy w zrozumieniu genezy pary Coopera tego oddziaływanie pomiędzy elektronami.

Rozwiązanie:

Zacniemy od wypisania wyrażenie na potencjał kulombowski pomiędzy elektronami oraz jonami:

$$V_{el-ion} = \int d\vec{r} (-e) \phi(\vec{r}) \sum_{j=1}^N V_{ion}(\vec{r} - \vec{R}_j)$$

$$\vec{R}_j = \vec{R}_j^0 + \vec{u}_j$$

↑ energia potężnie nieliniowa

← wyobryskanie z potężnie nieliniowej