1 Transformacja Bogoliubowa-Valatina

Zdiagonalizować hamiltonian Bogoliubowa-de Gennesa:

$$\hat{H} - \mu\hat{N} = \sum_{\vec{k}} \psi^+_{\vec{k}} \begin{pmatrix} \xi_{\vec{k}} & -\Delta \\ -\Delta^* & -\xi_{\vec{k}} \end{pmatrix} \psi_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}} + \frac{\Omega|\Delta|^2}{g}$$

$\psi^+_k = (c^+_{k\uparrow}, c_{-k\downarrow})$

Wykorzystując transformację Bogoliubowa-Valatina:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\vec{k}\uparrow} \\ \alpha^+_{-\vec{k}\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^*_k & -v_k \\ v^*_k & u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\vec{k}\uparrow} \\ c^+_{-\vec{k}\downarrow} \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie:

Transformacja Bogoliubowa-Valatina jest transformacją kanoniczną, czyli musi zachowywać relacje komutacyjne w tym przypadku:

$$\{\alpha_{k\uparrow}, \alpha^+_{k\uparrow}\} = \alpha_{k\uparrow}\alpha^+_{k\uparrow} + \alpha^+_{k\uparrow}\alpha_{k\uparrow} =$$

$$= \{(u^*_k c_{k\uparrow} - v_k c^+_{-k\downarrow}), (u_k c^+_{k\uparrow} - v^*_k c_{-k\downarrow})\} =$$

$$= |u_k|^2 \underbrace{\{c_{k\uparrow}, c^+_{k\uparrow}\}}_{=1} - u^*_k v^*_k \underbrace{\{c_{k\uparrow}, c_{-k\downarrow}\}}_{=0} +$$

$$- u_k v_k \underbrace{\{c^+_{-k\downarrow}, c^+_{k\uparrow}\}}_{=0} + |v_k|^2 \underbrace{\{c^+_{k\downarrow}, c_{k\uparrow}\}}_{=1} =$$

$$= |u_k|^2 + |v_k|^2 \overset{!}{=} 1$$

Oznacza to, że transformacja Bogoliubowa jest transformacją unitarną.

Szukamy wartości własnych macierzy hamiltonianu:

$$\begin{vmatrix} \xi_k - E & -\Delta \\ -\Delta^* & -\xi_k - E \end{vmatrix} = -(\xi_k - E)(\xi_k + E) - \Delta^2 = 0$$

$$-\left(\xi_k^2 + \cancel{E\xi_k} - \cancel{E\xi_k} - E^2\right) - \Delta^2 = 0$$

$$E^2 = \xi_k^2 + \Delta^2 \implies E_\pm = \pm\sqrt{\xi_k^2 + |\Delta|^2} = \pm E_k$$

gdy $|\Delta| > E_+$ brak wzbudzeń, czyli $|\Delta|$ to przerwa energetyczna.

Wykorzystując, że

$$\begin{pmatrix} c_{k\uparrow} \\ c^+_{-k\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k & v_k \\ -v_k^* & u_k^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{k\uparrow} \\ \alpha^+_{-k\downarrow} \end{pmatrix}$$

↑ bo $U^+ = U^{-1}$, dla U- unitarnego

$$\hat{H} = \sum_k (\alpha^+_{k\uparrow}, \alpha_{-k\downarrow}) \begin{pmatrix} u_k^* & -v_k \\ v_k^* & u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_k - E & -\Delta \\ -\Delta^* & -\xi_k - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k & v_k \\ -v_k^* & u_k^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{k\uparrow} \\ \alpha^+_{-k\downarrow} \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_k \xi_k + \frac{\Omega|\Delta|^2}{g} =$$

$$= \sum_k (\alpha^+_{k\uparrow}, \alpha_{-k\downarrow}) \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{k\uparrow} \\ \alpha^+_{-k\downarrow} \end{pmatrix} + \sum_k \xi_k + \frac{\Omega|\Delta|^2}{g}$$

$$\begin{cases} |u_k|^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_k^2 + |\Delta|^2}}\right) \\ |v_k|^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_k}{\sqrt{\xi^2 + |\Delta|^2}}\right) \end{cases}$$ ← patrz praca domowa.

$$\hat H = \sum_k \Big(E_k \alpha^+_{k\uparrow}\alpha_{k\uparrow} - E_k \underbrace{\alpha_{-k\downarrow}\alpha^+_{-k\downarrow}}_{1-\alpha^+_{-k\downarrow}\alpha_{-k\downarrow}}\Big) + \sum_k \xi_k + \frac{\Omega|\Delta|^2}{g} =$$

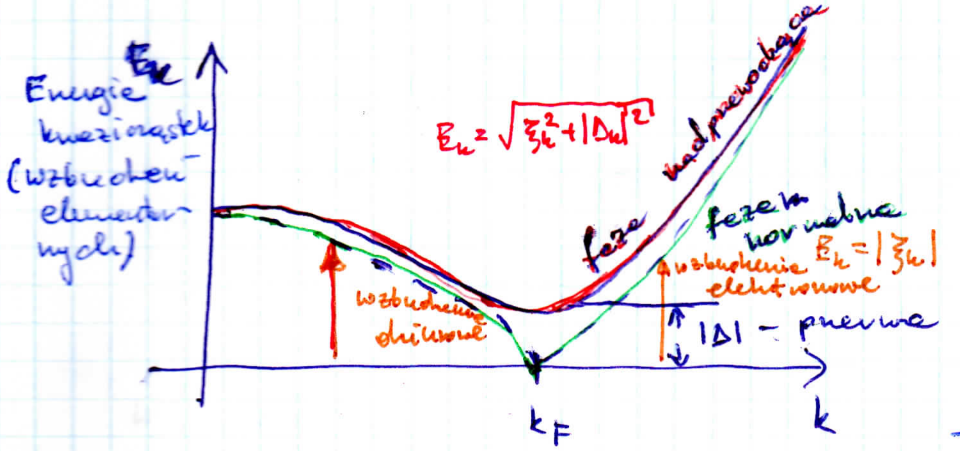
$$\underset{E_k=E_{-k}}{=} \sum_{k\sigma} E_k \alpha^+_{k\sigma}\alpha_{k\sigma} + \sum_k (\xi_k - E_k) + \frac{\Omega|\Delta|^2}{g} =$$

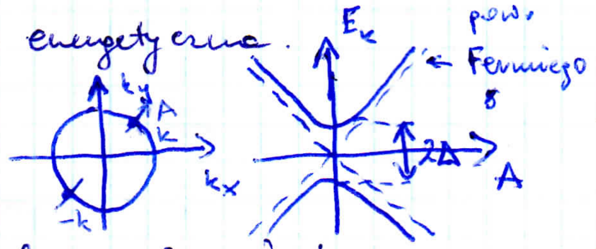
$$= E_{BCS} + \sum_{k\sigma} E_k \underbrace{\alpha^+_{k\sigma}\alpha_{k\sigma}}$$

kwazi cząstki - Bogoliubowa, będące superpozycją elektronów powyżej ε_F i dziur poniżej ε_F.

$$\xi_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu$$
$$\mu = \varepsilon_F + O(T^2)$$

$$E_{BCS} = \sum_k (\xi_k - E_k) + \frac{\Omega|\Delta|^2}{g}$$ ← energia układu przy braku kwazi-cząstek (stan podstawowy)





Występowanie przerwy energetycznej jest pośrednio powodem występowania zerowego oporu. Rozpraszanie elektronów w nadprzewodniku występuje nieustannie, ale pęd pary Coopera jako całości jest zachowywany. Dopiero gdy go dostarczymy odpowiednio dużo energii (powyżej 2Δ) para może się rozerwać i wtedy pęd cząstek może ulec zmianie.

Energię możemy dostarczyć na sposób ciepła, gdy $T > T_c$ ~~Kiedy~~ lub gdy cząstki mają odpowiednio dużą energię kinetyczną, czyli $j > j_c$ – gęstości prądu.

② Równanie przerwy energetycznej

~~Zadanie~~ ~~wyznacz~~ Wyprowadzić równanie przerwy energetycznej, a następnie za jej pomocą obliczyć jej wartość w $T=0$ oraz znaleźć temperaturę ~~kry~~ krytyczną.

Rozwiązanie:

Wiemy, że

$$\Delta_k = -\sum_{k'} u_{kk'} \langle c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} \rangle$$

$$u_{kk'} = \begin{cases} -\frac{g}{\Omega}, & |\xi_k|, |\xi_{k'}| < \omega_D \\ 0, & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

W celu znalezienia równania przerwy tutaj także wykorzystujemy operatory zdefiniowane przy ~~operacji~~ transformacji Bogoliubowa-Valatina:

$$\Delta_k = + \sum \frac{1}{\Omega} \sum_{k'} g \left\langle \left(-v_{k'} \alpha^{+}_{k'\uparrow} + u_{k'} \alpha_{-k'\downarrow}\right)\left(u_{k'} \alpha_{k'\uparrow} + v_{k'} \alpha^{+}_{-k'\downarrow}\right) \right\rangle$$

$$= + \frac{g}{\Omega} \sum_{k} \Big\{ -u_k v_k \langle \alpha^{+}_{k\uparrow} \alpha_{k\uparrow} \rangle - v_k^2 \langle \alpha^{+}_{k\uparrow} \alpha^{+}_{-k\downarrow} \rangle + |u_k|^2 \langle \alpha_{-k\downarrow} \alpha_{k\uparrow} \rangle +$$

$$+ u_k v_k \langle \alpha_{-k\downarrow} \alpha^{+}_{-k\downarrow} \rangle \Big\}$$

aby utrzymać samozgodność teorii żądamy:

$$\langle \alpha^{+}_{k\uparrow} \alpha_{k\uparrow} \rangle = n_F(E_k)$$

$$\langle \alpha^{+}_{k\uparrow} \alpha^{+}_{-k\downarrow} \rangle = 0$$

$$\langle \alpha_{-k\downarrow} \alpha_{+k\uparrow} \rangle = 0$$

$$\langle \alpha_{-k\downarrow} \alpha^{+}_{-k\downarrow} \rangle = 1 - \langle \alpha^{+}_{-k\downarrow} \alpha_{-k\downarrow} \rangle = 1 - n_F(E_k),$$

$$1 - \alpha^{+}_{-k\downarrow} \alpha_{-k\downarrow}$$

gdzie ~~$n_F(E_k) =$~~

czyli

$$\boxed{\Delta = \frac{g}{\Omega} \sum_k v_k u_k \left[1 - 2n_F(E_k)\right] = \frac{g}{\Omega} \sum_k \frac{\Delta}{2E_k}\left(1 - 2n_F(E_k)\right)}$$

Równanie przerwy energetycznej BCS

przy czym:

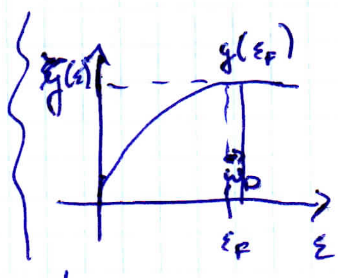
$$n_F(E_k) = \cancel{\frac{1}{e^{\beta E_k}+1}}$$ – rozkład Fermiego-Diraca.

Przerwa energetyczna dla $T=0$

$\hbar = 1$

$$1 = g \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi \, \varrho(\mu+\xi) \, \frac{1 - 2n_F\left(\sqrt{\xi^2+\Delta^2}\right)}{2\sqrt{\xi^2+\Delta^2}} =$$

gęstość stanów



$$= g \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi \, \frac{\mathrm{tgh}\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\xi^2+\Delta^2}\right)}{2\sqrt{\xi^2+\Delta^2}} \, \varrho(\mu+\xi) \approx$$

$$= g\,\mathcal{G}(E_F) \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi \; \frac{tgh\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\xi^2+\Delta^2}\right)}{2\sqrt{\xi^2+\Delta^2}} \xrightarrow[T\to 0]{} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi \; g\,\mathcal{G}(\varepsilon_F) \frac{1}{2\sqrt{\xi^2+\Delta_0^2}} =$$

czyli

$$1 = g\,\mathcal{G}(E_F) = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi \frac{1}{2\sqrt{\xi^2+\Delta_0^2}} = g\,\mathcal{G}(\varepsilon_F)\; \text{aresinh}\left(\frac{\omega_D}{\Delta_0}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_0 = \frac{\omega_D}{\sinh\left(\frac{1}{g_0\,\mathcal{G}(\varepsilon_F)}\right)} \xrightarrow[g\to 0]{} 2\omega_D \exp\left(-\frac{1}{g\,\mathcal{G}(\varepsilon_F)}\right)$$

granica słabych sprzężeń

$$\boxed{\Delta_0 = 2\omega_D \exp\left(-\frac{1}{g\,\mathcal{G}(\varepsilon_F)}\right)}$$

Temperatura krytyczna:

$\Delta = 0$ w $T = T_c$, czyli $\hbar = 1$

$$1 = g_0\,\mathcal{G}(\varepsilon_F) \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi \; \frac{tgh\left(\frac{\beta}{2}|\xi|\right)}{2|\xi|} =$$

$$= g\,\mathcal{G}(\varepsilon_F) \int_0^{\omega_D} d\xi \; \frac{tgh\left(\frac{\beta}{2}\xi\right)}{\xi} = g\,\mathcal{G}(\varepsilon_F) \int_0^{\beta\omega_D/2} dx \; \frac{tgh\,x}{x} =$$

przez części

$$= \left\{ \ln\left(\frac{\beta\omega_D}{2}\right) \underbrace{tgh\left(\frac{\beta\omega_D}{2}\right)}_{\simeq 1} - \int_0^{\beta\omega_D/2} dx \; \frac{\ln x}{\cosh^2 x} \right\} g\,\mathcal{G}(\varepsilon_F) \simeq$$

$$= g\,\mathcal{G}(\varepsilon_F) \left\{ \ln\left(\frac{\beta\omega_D}{2}\right) + \gamma - \ln\frac{\pi}{4} \right\}$$

γ – stała Eulera, $\gamma = 0{,}577215\ldots$

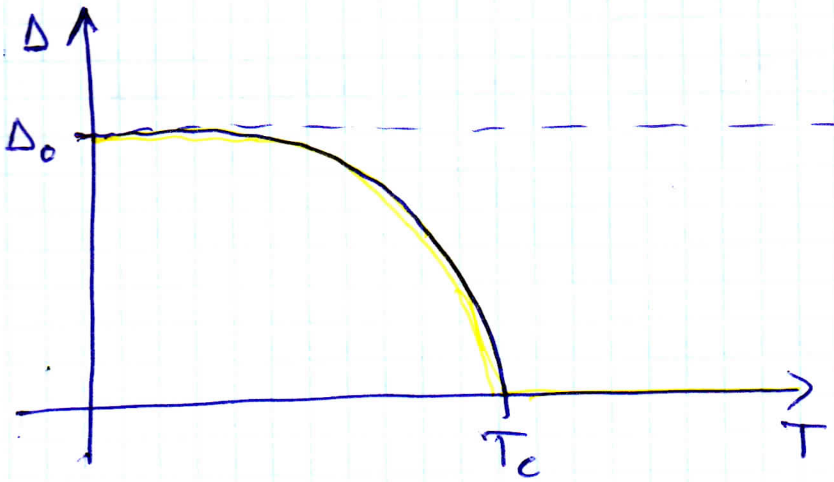
$$\exp\left(\frac{1}{g\,G(\varepsilon_F)}\right) \simeq \frac{2\beta\omega_D}{\pi} e^{\gamma}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{k_B T_c \cong \frac{2e^{\gamma}}{\pi}\,\omega_D \exp\left(-\frac{1}{g_0\, G(\varepsilon_F)}\right)}$$

~~Pokaz~~ ponieważ $\omega_D \sim M^{-1/2}$ (masa jonów), więc także $T_c \sim M^{-1/2}$, co tłumaczy obserwowany efekt izotopowy.

Stosunek $\frac{2\Delta_0}{k_B T}$ jest uniwersalny dla teorii BCS i wynosi:

$$\frac{2\Delta_0}{k_B T_c} = \frac{2e^{\gamma}}{\pi} \approx 3{,}528.$$



<u>Funkcje falowe BCS:</u> (Bardeen, Cooper, Schieffer, Phys. Rev. 105 (1957))

$$|\psi_{BCS}\rangle = \prod_k \left(u_k^* + v_k^* c_{k\uparrow}^{+} c_{-k\downarrow}^{+}\right)|0\rangle$$

parametry wariacyjne (wychodzą takie jak w transformacji Bogoliubowa)

wtedy dostaje się morze Fermiego $|\Delta|=0$

$$\begin{cases} u_k = \begin{cases} 1 & \text{dla } |k| \leq k_F \\ 0 & \text{dla } |k| > k_F \end{cases} \\ v_k = \begin{cases} 0 & \text{dla } |k| \leq k_F \\ 1 & \text{dla } |k| > k_F \end{cases} \end{cases}$$

← odtwarza się morze Fermiego, gdy $|\Delta| = 0$