PODSTAWY FIZYKI IV

25.02.2020

ćwiczenia #1

▶ CZYNNIK CAŁKUJĄCY

Rozważmy zwyczajne równanie różniczkowe I-rzędu o postaci:

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (1.1.)$$

Jednym ze sposobów rozwiązywania takiego problemu jest wykorzystanie tzw. czynnika całkującego.

Obie strony równania (1.1.) mnożymy przez $\mu(x)$, wtedy

$$\mu(x)\, y' + \mu(x)\, p(x)\, y = q(x)\, \mu(x) \qquad (1.2.)$$

Funkcję $\mu(x)$ wybieramy tak, aby lewą stronę równania (1.2.) można było zebrać do postaci:

$$(u(x)y)' = u'(x)\, y + u(x)\, y' , \qquad (1.3.)$$

czyli $u(x) = \mu(x)$, a $u'(x) = \mu(x)\, p(x)$. Prowadzi to do równania za pomocą którego możemy znaleźć wyrażenie na czynnik całkujący $\mu(x)$:

$$\mu'(x) = p(x)\mu(x) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = p(x)\,dx \Rightarrow \boxed{\mu(x) = \exp\left(\int p(x)\,dx\right)} \qquad (1.4.)$$

Pozwala nam to na znalezienie ogólnego rozwiązania tego problemu:

$$(\mu(x)\, y)' = \mu(x)\, q(x) \Rightarrow y(x)\,\mu(x) = \int \mu(x)\, q(x)\,dx , \qquad (1.5.)$$

czyli

$$\boxed{y(x) = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx}\, q(x)\,dx} \qquad (1.6.)$$

Stałe całkowania pochodzące z $\int p(x)dx$ kasują się i pozostaje tylko ta pochodząca z całki $\int \mu(x) q(x)\,dx$, którą wyznacza się z warunku początkowego.

Pojęcie czynnika całkującego pojawi się później w kontekście II zasady termodynamiki.

▶ PRAWO STYGNIĘCIA NEWTONA

Z doświadczenia wiemy, że ciało o temperaturze T będące w kontakcie z otoczeniem o temperaturze T_{ot} dąży do stanu równowagi, czyli stanu w którym temperatura otoczenia i układu wyrównuje się. Proces ten jest opisywany empirycznym prawem stygnięcia Newtona, które mówi, że szybkość zmian temperatury ciała jest proporcjonalna do różnicy temperatury ciała i otoczenia:

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_{ot}(t)\right), \qquad (1.7.)$$

gdzie stała k zależy od własności danego ciała i od natury kontaktu termicznego z otoczeniem.

Równanie (1.7.) jest równaniem typu (1.1.) dla którego $p(t) = k$, a $q(t) = kT_{ot}(t)$. Możemy znaleźć jego rozwiązanie przy pomocy czynnika całkującego:

$$\mu(t) = \exp\left(\int k\,dt\right) = \exp(kt + c) = Ae^{kt}, \qquad (1.8.)$$

gdzie $A = e^c$. Wykorzystując (1.6.) dostajemy ogólne rozwiązanie:

$$T(t) = \frac{1}{A}e^{-kt}\int Ae^{kt}\,kT_{ot}(t)\,dt = e^{-kt}\int e^{kt}\,kT_{ot}(t)\,dt$$

$$T(t) = e^{-kt}\int e^{kt}\,kT_{ot}(t)\,dt \qquad (1.9.)$$

Zastosujemy teraz (1.9.) w najprostszym przypadku, czyli gdy temperatura otoczenia jest stała i wynosi T_0. Temperatura początkowa ciała wynosi T_p, wtedy

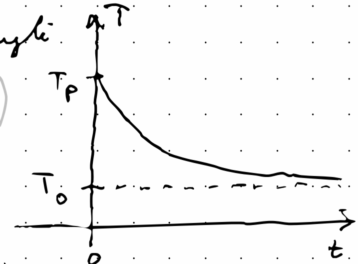
$$T(t) = kT_0\,e^{-kt}\int e^{kt}\,dt = kT_0\,e^{-kt}\left[\frac{1}{k}e^{kt} + \tilde{C}\right] =$$

$$= T_0 + Ce^{-kt}, \quad \text{gdzie} \quad C = kT_0\tilde{C}.$$

Korzystamy z warunku $T(t=0) = T_p$, wtedy

$T_p = T_0 + C \Rightarrow \quad C = T_p - T_0$, czyli

$$T(t) = T_0 + (T_p - T_0)e^{-kt} \quad (1.10.)$$



Charakterystyczny czas $\tau = 1/k$ związany z szybkością dochodzenia do stanu równowagi nazywamy czasem relaksacji.

ZADANIA

(1) Mam butelkę piwa (bezalkoholowego) o temperaturze 20°C. Wiem z wcześniejszych pomiarów, że jeżeli wstawię ją do lodówki, w której panuje temperatura 0°C, to po 90 minutach osiągnie ono moją ulubioną temperaturę 5°C. Dzisiaj jednak bardzo się śpieszę i postanowiłem więc wstawić piwo do zamrażarki, w której panuje temperatura −10°C. Po jakim czasie powinienem je wyjąć? Ile wynosi czas relaksacji butelki?

Rozwiązanie:

Najpierw przekształcamy równanie (1.10.):

$$T(t) - T_0 = (T_p - T_0)e^{-kt} \Rightarrow \frac{T(t) - T_0}{T_p - T_0} = e^{-kt} \Rightarrow k = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{T_p - T_0}{T(t) - T_0}\right)$$

Na podstawie danych znajdujemy wartość k:

$$k = \frac{1}{90\,\text{min}} \ln\left[\frac{20°C - 0°C}{5°C - 0°C}\right] = \frac{\ln 4}{90\,\text{min}} = \frac{\ln 2}{45}\,\text{min}^{-1},$$

co pozwala od razu znaleźć czas relaksacji:

$$\tau = \frac{1}{k} = \frac{45}{\ln 2}\,\text{min} \simeq 65\,\text{min}.$$

Znajdujemy czas po którym piwo schłodzi się w zamrażarce:

$$t_z = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{T_p - T_0}{T(t_z) - T_0}\right) = \frac{45\,\text{min}}{\ln 2}\ln\left[\frac{20°C - (-10°C)}{5°C - (-10°C)}\right] = 45\,\text{min}.$$

Jest to także tzw. czas połowicznego zaniku: $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$, po którym

$$\frac{T(t) - T_0}{T_p - T_0} = \frac{1}{2}.$$

(2) Blok metalowy umieszczony jest w otoczeniu, którego temperatura zmienia się według wzoru:

$$T_{ot}(t) = T_0 + A\sin(\omega t)$$

Początkowa temperatura bloku wynosi T_p znajdź zależność temperatury bloku od czasu w stanie ustalonym.

<u>Rozwiązanie:</u>

Zaczynamy od równania (1.9.) i wstawiamy $T_{ot}(t)$ zadane w tym problemie:

$$T(t) = e^{-kt}\int e^{kt} k\, T_{ot}(t)\,dt = e^{-kt}k\int e^{kt}(T_0 + A\sin\omega t)\,dt =$$

$$= kT_0 e^{-kt}\int e^{kt}dt + Ake^{-kt}\int e^{kt}\sin\omega t\,dt =$$

$$= T_0 + C_1 kT_0 e^{-kt} + Ake^{-kt}\underbrace{\int e^{kt}\sin\omega t\,dt}_{I} \qquad (*)$$

Wykonujemy całkowanie w I korzystając z tego, że $\sin\omega t = \frac{1}{2i}[e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}]$, wtedy:

$$I = \int \sin\omega t\, e^{kt}\,dt = \frac{1}{2i}\int\left[e^{(i\omega+k)t} - e^{-(i\omega-k)t}\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{i\omega+k}e^{(i\omega+k)t} + \frac{1}{i\omega-k}e^{-(i\omega-k)t}\right] + C_2 =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{-i\omega+k}{\omega^2+k^2}e^{i\omega t} - \frac{i\omega+k}{\omega^2+k^2}e^{-i\omega t}\right]e^{kt} + C_2 =$$

$$= \frac{1}{\omega^2+k^2}\left[k\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)\right]e^{kt} + C_2 ,$$

czyli wstawiając do (*) otrzymujemy, że

$$T(t) = T_0 + \frac{Ak}{\omega^2+k^2}\left[k\sin\omega t - \omega\cos\omega t\right] + Ce^{-kt},$$

gdzie $C = kT_0C_1 + kAC_2 = const.$

Z warunku początkowego mamy:

$$T(0) = T_p = T_0 - \frac{Ak\omega}{\omega^2+k^2} + C \quad \Rightarrow \quad C = T_p - T_0 + \frac{Ak\omega}{\omega^2+k^2}$$

W stanie ustalonym ($t \to \infty$) dostajemy, że

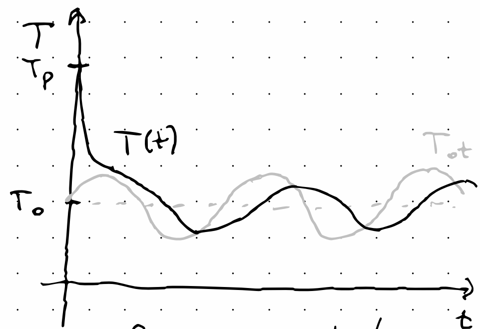
$$T(t) = T_0 + \frac{Ak}{k^2+\omega^2}\left[k\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)\right] \qquad (*)$$

Komentarz:

Równanie (*) przepiszemy w nieco innej postaci. Korzystamy z tożsamości trygonometrycznych:

$$B\sin(\omega t - \varphi) = B\cos\varphi\,\sin\omega t - B\sin\varphi\,\cos\omega t$$

porównując z (*) dostajemy, że:



$$\begin{cases} B\cos\varphi = \dfrac{Ak^2}{\omega^2+k^2} \\ B\sin\varphi = \dfrac{Ak\omega}{\omega^2+k^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B^2 = \frac{A^2k^2}{\omega^2+k^2} \Rightarrow B = \frac{Ak}{\sqrt{k^2+\omega^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B\sin\varphi}{B\cos\varphi} = \frac{\omega}{k}$$ ← przesunięcie fazowe względem temperatury otoczenia.

$$T(t) = T_0 + \frac{Ak}{\sqrt{k^2+\omega^2}}\sin\left(\omega t - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{k}\right)\right) + \left(T_p - T_0 + \frac{Ak\omega}{k^2+\omega^2}\right)e^{-kt}$$

W tym przypadku mamy do czynienia z dwoma charakterystycznymi skalami czasowymi:

- $\tau_\omega \sim \frac{1}{\omega}$ – jest charakterystycznym czasem zmienności temperatury otoczenia
- $\tau_k = \frac{1}{k}$ – jest czasem relaksacji temperatury bloku metalowego

a) gdy $\tau_k >> \tau_k$, czyli $\omega >> k$, wtedy $\frac{k}{\omega} << 1$ jest małym parametrem:

•) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega}{k} \to \infty$, czyli $\varphi \to \frac{\pi}{2}$

•) $B = A\frac{k}{\omega}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{\omega}\right)^2}} \to 0$

Oznacza to, że temperatura otoczenia uśrednia się do T_0 i temperatura ciała zmienia się jak

$$T(t) = T_0 + (T_p - T_0)e^{-kt}$$

b) Gdy $\tau_\omega >> \tau_k$, wtedy $k >> \omega$, czyli $\frac{\omega}{k} << 1$ jest małym parametrem:

•) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega}{k} \longrightarrow 0$, czyli $\varphi = 0$

•) $B = A \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{k})^2}} \longrightarrow A$

Oznacza to, że w stanie ustalonym temperatura ciała zmienia się dokładnie tak jak temperatura otoczenia:

$$T(t) = T_0 + A \sin \omega t$$

Uwaga: Na stronie ćwiczeń znajduje się plik Mathematica w którym narysowane są przebiegi $T(t)$ dla tych przypadków. (cw01-zad2.nb)

ROZSZERZALNOŚĆ TERMICZNA

Liniowy współczynnik rozszerzalności termicznej definiujemy jako:

$$\alpha = \frac{1}{l}\left(\frac{\partial l}{\partial T}\right) \Rightarrow \frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta T, \qquad (1.11.)$$

czyli dla małych ΔT mamy:

$$l = l_0(1 + \alpha(T - T_0)), \qquad (1.12.)$$

gdzie l_0 jest długością ciała w T_0.
Analogicznie definiujemy współczynnik rozszerzalności objętościowej jako:

$$\gamma = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right) \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T, \qquad (1.13.)$$

czyli dla małych ΔT:

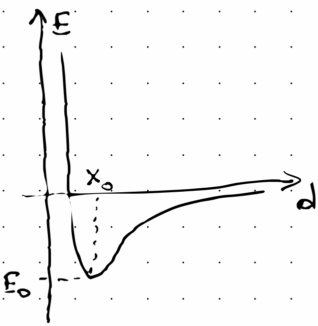
$$V = V_0(1 + \gamma(T - T_0)) \qquad (1.14.)$$

W ogólności współczynniki α i γ zależą od temperatury. Wyniki uzyskiwane za ich pomocą są dokładne tylko w przedziałach temperatur w których zmiany współczynników są małe w porównaniu z ich wartością.

Zadania

③ Mikroskopowy model rozszerzalności termicznej

Energia potencjalna oddziaływania dwóch atomów danej substancji jest przedstawiona na rysunku obok. Znaleźć średnią odległość między atomami odpowiadającą energii $E > E_0$, zakładając, że:



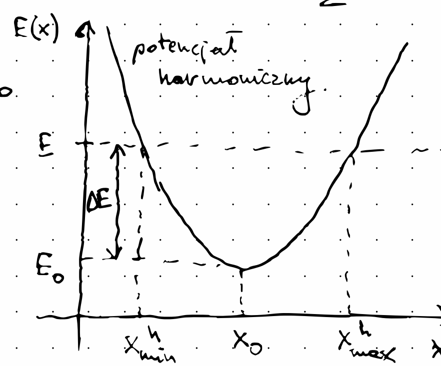
a) w pobliżu punktu równowagi $x = x_0$ energia potencjalna daje się przybliżyć wzorem:
$$E_p(x) \approx a(x-x_0)^2 - b(x-x_0)^3 + E_0,$$
gdzie a i b są stałymi dodatnimi,

b) anharmoniczna poprawka trzeciego rzędu jest mała, tzn. $b|x-x_0| \ll a$,

c) punkty zwrotne x_{min} i x_{max} drgań bardzo niewiele różnią się od punktów zwrotnych oscylatora harmonicznego x^h_{min} i x^h_{max} (dla $b=0$),

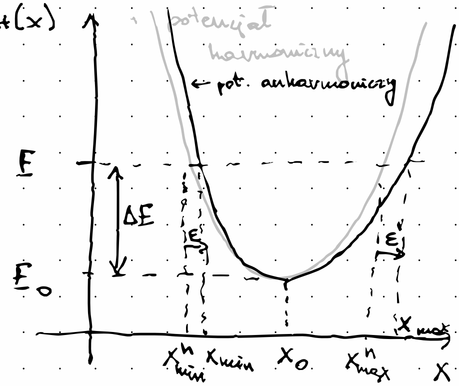
d) średnia odległość między atomowa w czasie drgań może być przybliżona przez średnią arytmetyczną $\langle x \rangle \approx \dfrac{x_{min} + x_{max}}{2}$.

<u>Rozwiązanie:</u>



Punkty zwrotne potencjału harmonicznego znajdujemy z warunku:
$$E_{pot}(x = x^h_{min/max}) = E \quad \text{dla } b = 0,$$
czyli
$$E = E_0 + \Delta E = a\left(x^h_{min/max} - x_0\right)^2 + E_0,$$
stąd
$$x^h_{min} = x_0 - \sqrt{\frac{\Delta E}{a}}$$
$$x^h_{max} = x_0 + \sqrt{\frac{\Delta E}{a}}$$

Teraz uwzględnimy wpływ członu anharmonicznego zakładając, że punkty zwrotne nieznacznie zmieniają swe położenie w porównaniu do potencjału harmonicznego:



$$x_{min} = x^h_{min} + \varepsilon$$
$$x_{max} = x^h_{max} + \varepsilon'$$

Dla x_{min} mamy:

$$\Delta E = a(\underbrace{x_{min}-x_0}_{-\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}+\varepsilon})^2 - b(\underbrace{x_{min}-x_0}_{-\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}+\varepsilon})^3 = a\left(\frac{\Delta E}{a} - 2\varepsilon\sqrt{\frac{\Delta E}{a}} + \varepsilon^2\right) +$$

$$-b\left(-\left(\frac{\Delta E}{a}\right)^{3/2} + 3\varepsilon\frac{\Delta E}{a} - 3\varepsilon^2\sqrt{\frac{\Delta E}{a}} + \varepsilon^3\right) \underset{\varepsilon \ll 1}{\simeq} \Delta E - 2\varepsilon\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}\,a + \left(\frac{\Delta E}{a}\right)^{3/2} b - 3\varepsilon\frac{\Delta E}{a} b,$$

czyli $\varepsilon\left(2a\sqrt{\frac{\Delta E}{a}} + 3b\frac{\Delta E}{a}\right) = b\left(\frac{\Delta E}{a}\right)^{3/2}$, co prowadzi do

$$\varepsilon = \frac{b\frac{\Delta E}{a}}{2a + 3b\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}} \simeq \frac{b\Delta E}{2a^2}$$

$b|x-x_0| \ll a$, czyli $\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}\, b \ll a$

Analogiczny rachunek dla ε' prowadzi do:

$$\varepsilon' = \varepsilon \simeq b\frac{\Delta E}{2a^2}, \quad \text{przy czym} \quad -\sqrt{\frac{\Delta E}{a}} \to \sqrt{\frac{\Delta E}{a}}$$

Otrzymaliśmy, więc

$$x_{min} = x_0 - \sqrt{\frac{\Delta E}{a}} + \frac{b\Delta E}{2a^2}$$

$$x_{max} = x_0 + \sqrt{\frac{\Delta E}{a}} + \frac{b\Delta E}{2a^2}$$

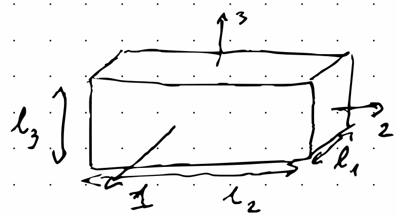
Średnia odległość między atomami wynosi więc

$$\langle x \rangle \simeq \frac{x_{min} + x_{max}}{2} = x_0 + \frac{b\Delta E}{2a^2}$$

Energia jest monotonicznie rosnącą funkcją temperatury, więc jej wzrost powoduje zwiększenie średniej odległości między atomami. Zauważmy, że efekt ten zawdzięczamy anharmoniczności potencjału między atomami i jego asymetrii.

4 Wykazać, że dla materiału anizotropowego zachodzi związek: $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, gdzie γ jest współczynnikiem rozszerzalności objętościowej danego materiału, zaś α_i $(i = 1,2,3)$ są współczynnikami rozszerzalności liniowej wzdłuż 3 nierównoważnych (i wzajemnie prostopadłych) kierunków tego materiału.

Rozwiązanie:



$V = l_1 l_2 l_3$ - objętość ciała

Korzystamy z definicji:

$$\gamma = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right) = \frac{1}{l_1 l_2 l_3}\left[\frac{\partial(l_1 l_2 l_3)}{\partial T}\right] =$$

$$= \frac{1}{l_1 l_2 l_3}\left(\frac{\partial l_1}{\partial T} l_2 l_3 + l_1 \frac{\partial l_2}{\partial T} l_3 + l_1 l_2 \frac{\partial l_3}{\partial T}\right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{l_i}\left(\frac{\partial l_i}{\partial T}\right) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i$$

Dla ciał izotropowych $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, czyli $\gamma = 3\alpha$.

5 Słupy linii energetycznej oddalone są od siebie o 50 m. Pomiędzy słupami zawieszony jest miedziany przewód, w taki sposób, że w temperaturze $-25°C$ przewód jest naprężony poziomo. Oszacuj zwis przewodu w temperaturze 35°C. Dla miedzi $\alpha = 1{,}6 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$.

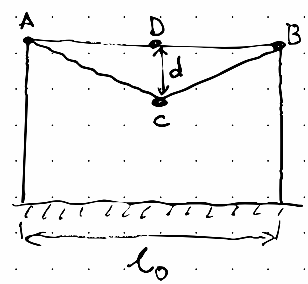
Rozwiązanie:

Przewód zmieni swoją długość o:

$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta T = 1{,}6 \cdot 10^{-5}\,K^{-1} \cdot 60\,K \cdot 50\,m = 0{,}048\,m = 4{,}8\,cm$$

•) oszacowanie od góry

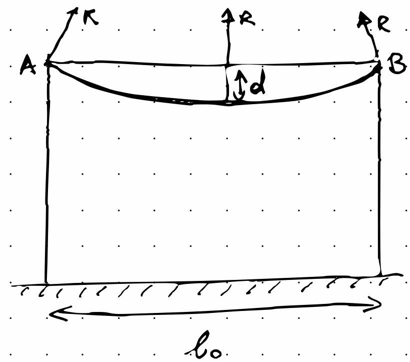
Zakładamy, że przewód ma kształt trójkąta, wtedy z tw. Pitagorasa mamy



$$\left(\frac{l_0 + \Delta l}{2}\right)^2 = \left(\frac{l_0}{2}\right)^2 + d^2 \Rightarrow d = \frac{1}{2}\sqrt{(l_0 + \Delta l)^2 - l_0^2} =$$

$$\xrightarrow{\Delta l \ll l_0} \simeq \frac{1}{2}\sqrt{2 l_0 \Delta l} = 1{,}1\,m$$

•) Oszacowanie od dołu



Zakładamy, że drut ma kształt fragmentu łuku.

Długość łuku wynosi:

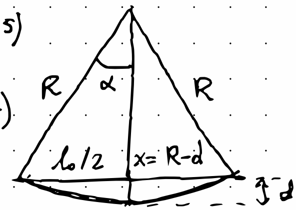
(*) $l_0 + \Delta l = 2R\alpha \Rightarrow R = \frac{l_0+\Delta l}{2\alpha} \simeq \frac{l_0}{2\alpha}$

Długość cięciwy AB wynosi:

$$l_0 = 2R\sin\alpha$$

Stosujemy przybliżenie $\sin\alpha \simeq \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + O(\alpha^5)$

$$2R\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots\right) + \Delta l = 2R\alpha \Rightarrow \Delta l = 2R\frac{\alpha^3}{6} \quad (**)$$



$x = R\cos\alpha$

$d = R(1-\cos\alpha)$

Równanie (**) dzielę stronami przez (*)

$$\frac{\Delta l}{l_0+\Delta l} = \frac{\alpha^2}{6} \Rightarrow \alpha \underset{\Delta l << l_0}{\simeq} \sqrt{\frac{6\Delta l}{l_0}}$$

Ostatecznie dostajemy (patrz rysunek obok):

$$d = R(1-\cos\alpha) \simeq R\left(1 - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + O(\alpha^4)\right)\right) \simeq \frac{R\alpha^2}{2} = \frac{l_0}{4\alpha}\alpha^2 = \frac{l_0\alpha}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{6 l_0 \Delta l} = \frac{1}{4}\sqrt{6\cdot 50\cdot 0{,}048}\,m \simeq 0{,}95\,m$$

Dostajemy zatem

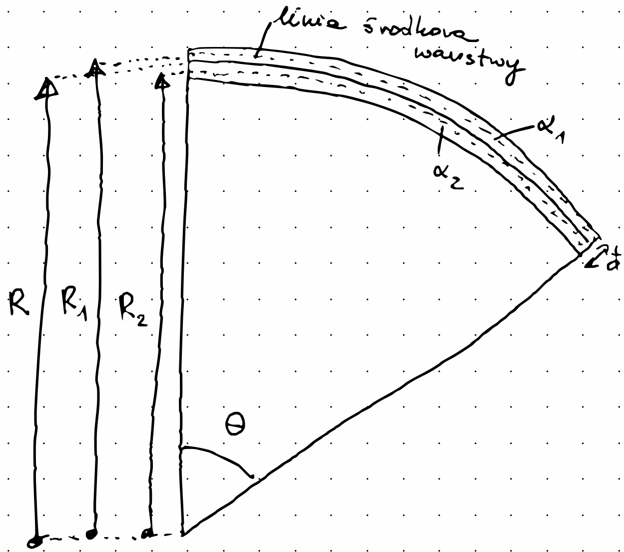
$$0{,}95\,m \le d \le 1{,}1\,m.$$

6 Bimetal

Do budowy termoregulatorów, ograniczników temperatury i tym podobnych urządzeń stosuje się często urządzenie zwane bimetalem. Jest to pasek złożony z dwóch spojonych ze sobą warstw metali o różnych współczynnikach rozszerzalności. Pasek taki przy ogrzewaniu będzie się wyginał i może w ten sposób zamykać lub otwierać obwód elektryczny. Dany jest bimetal o grubości d, złożony z metali o współczynnikach rozszerzalności α_1 i α_2 $(\alpha_1 > \alpha_2)$. W temperaturze T_0 bimetal jest

prosty. Znajdź promień krzywizny bimetalu po ogrzaniu go o ΔT.
Dane są: $\alpha_1 = 1{,}8 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$ (mosiądz), $\alpha_2 = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$ (stal), $d = 1\,mm$, $l_0 = 5\,cm$, $\Delta T = 100\,K$.

Rozwiązanie:



Wydłużenie linii środkowych warstw wynosi:

$$l_1 = l_0(1 + \alpha_1 \Delta T)$$

$$l_2 = l_0(1 + \alpha_2 \Delta T)$$

Obie te linie są łukami opartymi na tym samym kącie θ, czyli

$$\theta = \frac{l_1}{R_1} = \frac{l_2}{R_2}$$

Ponadto

$$R_1 = R + \frac{d}{4}, \quad R_2 = R - \frac{d}{4},$$

czyli

$$\left(R - \frac{d}{4}\right) l_1 = l_2 \left(R + \frac{d}{4}\right) \Rightarrow R = \frac{d}{4}\,\frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2} = \frac{d}{4}\,\frac{2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta T}{(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T} \simeq$$

$$\underset{\alpha_i \Delta T \ll 1}{\simeq} \frac{d}{2(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T},$$

czyli

$$R = \frac{10^{-3}\,m}{2 \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-5}\,K^{-1} \cdot 100\,K} \simeq 0{,}85\,m$$

W praktyce oznacza to, że bimetal odchyla się od poziomu o

$$x \simeq R\left(1 - \cos\left(\frac{l_0}{R}\right)\right) \simeq 1{,}5\,mm.$$