# PODSTAWY FIZYKI IV

3.03.2020

## Ćwiczenia #2

## ▶ PROMIENIOWANIE TERMICZNE

Dla ciała promieniującego termicznie ilość energii emitowanej przez jednostkę powierzchni ciała w jednostce czasu i w zakresie częstości od $\nu$ do $\nu + d\nu$ jest dana równaniem:

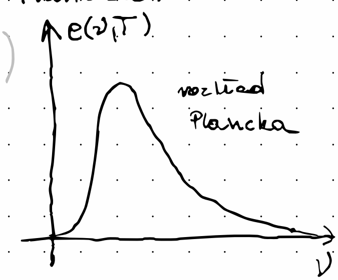
$$dJ_\nu = \frac{d^2 \mathcal{E}_\nu}{dt\, dS} = E(\nu, T)\, d\nu, \qquad (2.1)$$

gdzie $E(\nu, T)$ jest widmową zdolnością emisyjną. Jest ona powiązana z widmową zdolnością absorbcyjną $A(\nu, T) = P_{abs}(\nu) / P_{pad}(\nu)$ prawem promieniowania Kirchoffa

$$\frac{E(\nu, T)}{A(\nu, T)} = e(\nu, T), \qquad (2.2)$$

gdzie $e(\nu, T)$ jest pewną uniwersalną funkcją, która zależy tylko od częstości $\nu$ i temperatury $T$. Ciało absorbujące całkowicie promieniowanie dla wszystkich częstości $\nu$ $(A(\nu, T) = 1, \ \forall \nu)$ nazywamy ciałem doskonale czarnym. Zdolność emisyjna dla takich ciał jest dana rozkładem Plancka:

$$e(\nu, T) = \frac{2\pi \nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu / k_B T} - 1}, \qquad (2.3)$$




gdzie $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$ – stała Plancka,
$c = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$ – prędkość światła,
$k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K}$ – stała Boltzmanna

## ■ ZADANIA

### (1) Prawo Wiena dla częstości

Wyznaczyć częstotliwość maksymalną $\nu_{max}$ odpowiadającą maksimum widmowej zdolności emisyjnej ciała doskonale czarnego.

Rozwiązanie

Szukamy maksimum funkcji $e(\nu, T)$. Najpierw wprowadzimy zmienne bezwymiarowe:

$$e(\nu,T) = \alpha \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1} = \left\{ \begin{array}{c} \text{zamiana zmiennych} \\ x = \frac{h\nu}{k_BT} \Rightarrow \nu = \frac{k_BT}{h} x \end{array} \right\} = \alpha \left(\frac{k_BT}{h}\right)^3 \underbrace{\frac{x^3}{e^x-1}}_{f(x)} = \beta f(x)$$

$\alpha$: stała $= \frac{2\pi h}{c^2}$ ; $\beta$: stała $= \alpha\left(\frac{k_BT}{h}\right)^3$

Szukamy maksimum $f(x)$:

$$0 = \frac{df(x)}{dx} = \frac{3x^2(e^x-1) - x^3 e^x}{(e^x-1)^2},$$ a stąd mamy

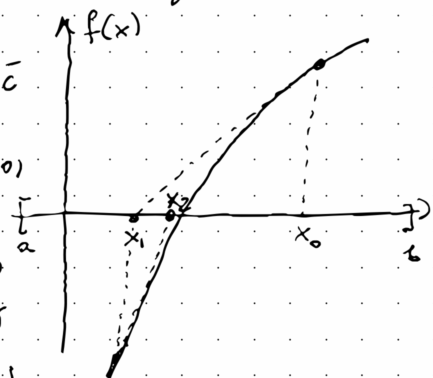
$$3x^2(e^x-1) - x^3e^x = 0 \Rightarrow x - 3(1-e^{-x}) = 0$$

Uzyskane równanie jest przykładem równania przestępnego, które możemy rozwiązać numerycznie korzystając np. z metody stycznych Newtona-Raphsona.

Metoda stycznych Newtona-Raphsona

Jeżeli chcemy znaleźć miejsce zerowe funkcji $f(x)$ wewnątrz przedziału $[a,b]$ możemy to zrobić korzystając z metody Newtona. Przyjmujemy założenia:

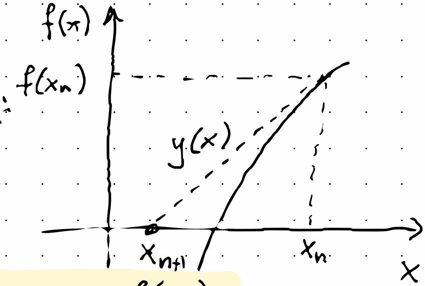
a) w przedziale $[a,b]$ jest dokładnie jeden pierwiastek,
b) funkcja ma różne znaki na krańcach przedziału, tj. $f(a)\cdot f(b) < 0$.
c) pierwsza i druga pochodna mają stały znak w tym przedziale.




Miejsce zerowe możemy wyznaczyć wtedy iteracyjnie:

1°) wybieram warunek początkowy $x_0$,
2°) z punktu $x_0$ prowadzę styczną do wykresu funkcji $f(x)$,
3°) jej przecięcie wyznacza mi nowy punkt początkowy $x_1$,
4°) Procedurę powtarzam tak długo, aż osiągnę satysfakcjonującą dokładność $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, gdzie $\varepsilon$ to dopuszczalny błąd.

Metoda ta szybko zbiega pod warunkiem, że punkt $x_0$ został wybrany odpowiednio blisko miejsca zerowego funkcji $f(x)$.




Równanie stycznej w punkcie $x_n$:
$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$$
w punkcie $x_{n+1}$ styczna ma przecinać oś X, czyli
$$f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) = 0 \Rightarrow \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \quad (2.4.)$$

W naszym przypadku:
$$g(x) = x - 3(1 - e^{-x})$$
$$g'(x) = 1 - 3e^{-x}$$

Pożądana dokładność
$$\varepsilon = 10^{-5}.$$

Warunek początkowy: $x - 3(1 - e^{-x}) = 0 \Rightarrow x_0 \simeq 3$, bo $e^{-3} \simeq 0$

| krok | $x_{n-1}$ | $x_n$ |
|---|---|---|
| 0 | $x_0 = 3$ | $x_1 = x_0 - g(x_0)/g'(x_0) = 2{,}82441$ |
| 1 | $x_1 = 2{,}82441$ | $x_2 = x_1 - g(x_1)/g'(x_1) = 2{,}82144$ |
| 2 | $x_2 = 2{,}82144$ | $x_3 = x_2 - g(x_2)/g'(x_2) = x_2$ |

Otrzymujemy zatem, że maksimum $e(\nu, T)$ jest dane równaniem:

Koniec procedury, metoda zbiegła z wymaganą dokł.

$$\boxed{\nu_{max} = 2{,}82144 \frac{k_B T}{h}} \quad (2.5.)$$

Jest to tzw. prawo przesunięć Wiena dla częstości.

2 Prawo Wiena dla długości fali

Wyznaczyć stałą $C_1$ w prawie przesunięć Wiena:
$$\lambda_{max} = \frac{C_1}{T}$$
opisującym zależność długości fali $\lambda_{max}$ odpowiadającej maksimum widmowej zdolności emisyjnej $e(\lambda, T)$ ciała doskonale czarnego od temperatury.

Rozwiązanie:

Nim zaczniemy zwrócimy uwagę na to, że oznaczenie

$e(\lambda,T) \neq e(\nu(\lambda),T)$, gdzie $\nu(\lambda) = \frac{c}{\lambda}$, co powoduje dużo nieporozumień. Funkcję $e(\lambda,T)$ definiujemy tak, aby sumaryczna zdolność emisyjna na przedziale $[\nu_1,\nu_2]$ była równa sumarycznej zdolności emisyjnej na przedziale $\left[\lambda_2 = \frac{c}{\nu_2}, \lambda_1 = \frac{c}{\nu_1}\right]$, czyli mówiąc inaczej

$$dJ = e(\nu,T)\,d\nu = e(\lambda,T)\,d\lambda,$$

a stąd mamy, że

$$e(\lambda,T) = e(\nu(\lambda),T)\left|\frac{d\nu}{d\lambda}\right|, \text{ gdzie } \left|\frac{d\nu}{d\lambda}\right| = \frac{c}{\lambda^2}$$

Dostajemy zatem

$$e(\lambda,T) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{hc/k_BT\lambda}-1} = \left\{\begin{array}{l}\text{przechodzimy do zmiennych} \\ \text{bezwymiarowych} \\ x = \frac{hc}{\lambda k_B T} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{k_B T x}\end{array}\right\} =$$

$$= \alpha\,\frac{x^5}{e^x-1} = \alpha f(x)$$

$$\text{stała} = \frac{2\pi(k_BT)^5}{h^4c^3}$$

sumaryczna zdolność emisyjna = emitancja

$$\boxed{J_{[\nu_1,\nu_2]} = \int_{\nu_1}^{\nu_2} e(\nu,T)\,d\nu = \int_{\lambda(\nu_2)}^{\lambda(\nu_1)} e(\lambda,T)\,d\lambda}$$

Szukamy maksimum $f(x)$:

$$0 = \frac{df}{dx} = \frac{(e^x-1)5x^4 - e^x x^5}{(e^x-1)^2} = 0 \Rightarrow x - 5(1-e^{-x}) = 0$$

Dostaliśmy równanie przestępne podobnie jak w zadaniu 1. Szukamy rozwiązania posługując się metodą stycznych.

$g(x) = x - 5(1-e^{-x})$

$g'(x) = 1 - 5e^{-x}$

Pożądana dokładność: $\varepsilon = 10^{-5}$

Warunek początkowy: $x_0 \approx 5,00$ $\quad e^{-5} \simeq 0$

| Krok | $x_{n-1}$ | $x_n$ |
|---|---|---|
| 0 | $x_0 = 5$ | $x_1 = x_0 - g(x_0)/g'(x_0) = 4,96514$ |
| 1 | $x_1 = 4,96514$ | $x_2 = x_1 - g(x_1)/g'(x_1) = 4,96511$ |
| 2 | $x_2 = 4,96511$ | $x_3 = x_2 - g(x_2)/g'(x_2) = x_2$ |

Procedura zbiegła

Oznacza to, że szukana stała:

$$C_1 = \frac{hc}{k_B \cdot x_{max}} = \frac{6,63\cdot 10^{-34}\cdot 2,998\cdot 10^{8}}{4,96511\cdot 1,381\cdot 10^{-23}}\ \mathrm{mK} \simeq 2,898\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m\cdot K}$$

Komentarz:

Ze względu na to, że $e(\lambda,T) \neq e(\nu(\lambda),T)$ także maksimum tych dwóch rozkładów wypada dla innych wartości, tj.

$$\nu_{max} \neq \frac{c}{\lambda_{max}} \qquad (*)$$

Na przykład:

•) dla $T = 310\,K$ – z grubsza temp. ludzkiego ciała

$\lambda_{max} = 9{,}35\,\mu m$ (podczerwień), $\lambda = \frac{c}{\nu_{max}} = 16{,}46\,\mu m$

•) dla $T = 5700\,K$ – z grubsza temp. powierzchni Słońca

$\lambda_{max} = 510\,nm$ (światło widzialne, kolor zielony), $\lambda = \frac{c}{\nu_{max}} = 895\,nm$ (bliska podczerwień)

Uwaga:

•) Na stronie zamieszczony został kod w Pythonie z implementacją algorytmu Newtona i wykorzystany do obliczenia miejsc zerowych w zadaniu 1 i 2. (newton.py)

•) Na stronie zamieszczony został także plik Mathematica z wykresami $e(\nu,T)$ i $e(\lambda,T)$. (cw02_zad2.nb).

•) Bardziej dokładna dyskusja rozkładu Plancka, a także własności $(*)$ znajduje się w artykule J.M. Marra & F.P. Willhina, Am. J. Phys. 80 (2012) 399, który także znajduje się na stronie ćwiczeń.

## 3 Pirometr dwubarwny

Wyznaczyć temperaturę świecącego ciała wiedząc, że stosunek zdolności emisyjnych dla dwóch długości fali $\lambda_1$ i $\lambda_2$ (leżących w pobliżu maksimum zdolności emisyjnej) wynosi $R=2$. Podać wartość liczbową temperatury dla $\lambda_1 = 500\,nm$ i $\lambda_2 = 400\,nm$.

Rozwiązanie:

Zgodnie z treścią zadania:

$$R = \frac{e(\lambda_1, T)}{e(\lambda_2, T)}, \quad \text{gdzie} \quad e(\lambda_i, T) = \frac{\alpha}{\lambda_i^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda_i k_B T}\right) - 1}$$

Ponieważ $\lambda_1$ i $\lambda_2$ leżą w pobliżu $\lambda_{max}$, więc możliwe jest przybliżenie:

$$e(\lambda_i, T) \approx \frac{\alpha}{\lambda_i^5} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda_i k_B T}\right),$$ bo $\lambda_i \approx \lambda_{max}$, a także $\frac{hc}{\lambda_{max} k_B T} \approx 5$ (zad. 2), ponadto $e^5 \approx 150 \gg 1$.

Prowadzi to do wyrażenia:

$$R = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^5 \frac{e^{hc/k_B T \lambda_2}}{e^{hc/k_B T \lambda_1}} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^5 \exp\left(\frac{hc}{k_B T}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)\right),$$

skąd dostajemy wyrażenie na temperaturę:

$$\ln\left[R\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^5\right] = \frac{hc}{k_B T}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) \Rightarrow T = \frac{\frac{hc}{k_B}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)}{\ln R + 5 \ln(\lambda_1/\lambda_2)}$$

Wstawiając wartości podane w zadaniu dostajemy:

$$T = \frac{14{,}4 \cdot 10^{-3}\, \mathrm{m \cdot K} \left(\frac{1}{400} - \frac{1}{500}\right) \cdot 10^9\, \mathrm{m}}{\ln 2 + 5 \ln(5/4)} \approx 3980\, \mathrm{K}.$$

## 4 Wyprowadzenie prawa Stefana-Boltzmanna

Wyprowadzić prawo Stefana-Boltzmana ze wzoru Plancka.

Rozwiązanie:

Całkowita emitancja ciała doskonale czarnego, czyli moc przez nie emitowana na jednostkę powierzchni ciała emitującego wynosi:

$$J = \frac{\mathcal{E}_c(T)}{\Delta S \Delta t} = \int_0^\infty e(\nu, T)\, d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} d\nu =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{wprowadzamy bezwymiarowe zmienne:} \\ x = \frac{h\nu}{k_B T} \Rightarrow dx = \frac{h}{k_B T} d\nu \end{array} \right\} = \frac{2\pi}{c^2}\left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx =$$

$$= \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty x^3 e^{-nx} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{zamiana zmiennych} \\ nx = t \Rightarrow n\,dx = dt \end{array} \right\} =$$

$$\left\{ \text{rozwijamy wyrażenie podcałkowe: } \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \right\}$$

$$= \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}}_{\zeta(4)\text{ - funkcja } \zeta \text{ Riemanna}} \underbrace{\int_0^\infty t^3 e^{-t} dt}_{\Gamma(4)\text{ - funkcja } \Gamma \text{ Eulera}} = \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{k_B T}{c}\right)^4 \underbrace{\zeta(4)}_{=\frac{\pi^4}{90}} \underbrace{\Gamma(4)}_{=3!} =$$

$= \sigma T^4$, gdzie $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$ - stała Stefana-Boltzmanna

$$\boxed{J = \sigma T^4} \qquad (2.6)$$

Informacje uzupełniające:

•) Gamma Eulera $\Gamma(z)$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{gdy } Re(z) > 0.$$

Własności:

a) $$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{przez} \\ \text{części} \end{array} \right\} = \frac{t^z}{z} e^{-t}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{t^z}{z}(-e^{-t}) dt =$$

$$= \frac{\Gamma(z+1)}{z} \Rightarrow \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

b) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1$, czyli $\Gamma(n) = n!$ $(n \in \mathbb{N})$

c) $$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \left\{ \begin{array}{l} u = t^{1/2} \\ 2u\,du = dt \end{array} \right\} = 2\int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

•) zeta Riemanna $\zeta(s)$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{gdy } Re\, s > 1.$$

Ważne wartości:

$\zeta(1)=\infty$, ale $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\zeta(1+\varepsilon)-\zeta(1-\varepsilon)}{2}=\gamma=0{,}5772\ldots$,

$\gamma$ – stała Eulera-Mascheroniego

$\zeta\left(\frac{3}{2}\right)=2{,}61238\ldots$,

$\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$, $\zeta(3)=1{,}202\ldots$, $\zeta(4)=\dfrac{\pi^4}{90}$ (zobacz uzupełnienie w pliku z treścią zadań)

$\zeta(3)$ – stała Apéry'ego

## ▶ PRAWO PLANCKA

Emitancja (stosunek mocy promieniowania emitowanego przez element powierzchni świecącej do jej wartości) dla ciał doskonale czarnych lub doskonale szarych ($A(\nu,T)=\varepsilon$, $\forall\nu$) o temperaturze $T$ jest dana prawem Stefana-Boltzmanna:

$$J=\varepsilon\sigma T^4,\quad \varepsilon\in[0,1] \tag{2.7.}$$

gdzie $\varepsilon$ to „średnia" wartość zdolności absorbcyjnej. W ogólności:

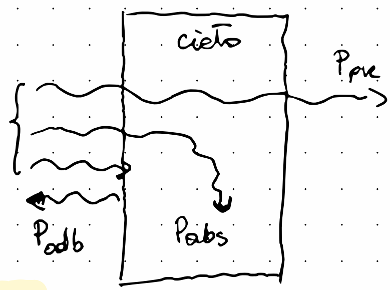
$$J=\int_0^\infty A(\nu,T)\,e(\nu,T)\,d\nu\neq\varepsilon\sigma T^4.$$

Dane ciało może pochłaniać, odbijać lub przepuszczać promieniowanie, wtedy

$t=P_{prz}/P_{pad}$ – wsp. transmisji

$r=P_{odb}/P_{pad}$ – wsp. odbicia

$\varepsilon=P_{abs}/P_{pad}$ – wsp. absorbcji




Z zachowania energii mamy:

$$\varepsilon+r+t=1 \tag{2.8}$$

## ■ ZADANIA

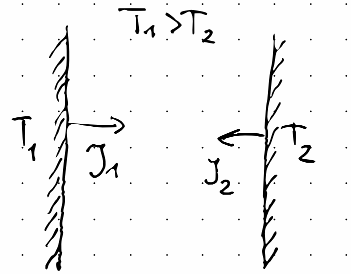
### (5) Model termosu próżniowego

Dwie nieskończone, doskonale czarne płaszczyzny o temperaturach $T_1=300\,K$ i $T_2=4\,K$ umieszczone są naprzeciw siebie.

a) Obliczyć strumień energii (moc na jednostkę powierzchni) między nimi.

b) Między te płaszczyzny ustawiono trzecią odbijającą $r = 95\%$ padającego promieniowania. Obliczyć temperaturę osłony i strumień energii teraz przepływający między płaszczyznami.

<u>Rozwiązanie:</u>

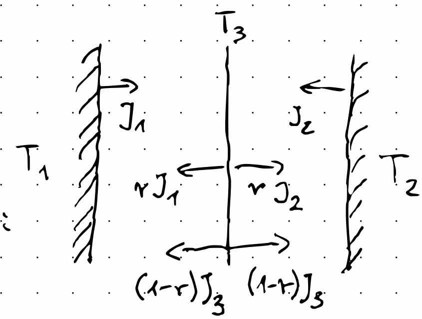



a) Moce emitowane przez płaszczyzny na jednostkę powierzchni:

$$J_1 = \sigma T_1^4, \quad J_2 = \sigma T_2^4,$$

wtedy strumień energii wynosi:

$$J_0 = J_1 - J_2 = \sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)$$




b) Dla płaszczyzny odbijającej współczynnik absorpcji wynosi $\varepsilon = 1 - r$ ($t = 0$, osłona jest nieprzepuszczalna).
Moc emitowana przez nią wynosi:

$$J_3' = \varepsilon (J_3)_{\substack{\text{doskonale} \\ \text{czarne}}} = (1-r)\sigma T_3^4$$

Strumień energii po lewej stronie: $J_{13} = J_1 - rJ_1 - J_3' =$
$= J_1(1-r) - (1-r)J_3$

Strumień energii po prawej stronie: $J_{32} = -J_2 + rJ_2 + (1-r)J_3 =$
$= -(1-r)J_2 + (1-r)J_3$

Strumienie te muszą być w równowadze, aby osłona miała ustaloną temperaturę, czyli

$$J_{13} = (1-r)J_1 - (1-r)J_3 = -(1-r)J_2 + (1-r)J_3 = J_{32},$$

czyli $J_3 = \frac{J_1+J_2}{2} \Rightarrow T_3 = \sqrt[4]{\frac{T_1^4+T_2^4}{2}} = 252\,K$

Strumień energii płynący od płyty o temperaturze $T_3$ do płyty o temp. $T_2$, czyli od osłony do zewnętrza termosu wynosi:

$$J_{32} = -(1-r)J_2 + (1-r)J_3 = (1-r)\frac{J_1+J_2}{2} - (1-r)J_2 =$$

$$= (1-r)\frac{J_1-J_2}{2} = \frac{1}{2}(1-r)J_0$$

Liczymy ilokrotnie zmniejszył się strumień energii dochodzący do płaszczyzny zimnej ($T_2$) po ustawieniu osłony:

$$\frac{J_{32}}{J_0} = \frac{1-r}{2} = \frac{5\%}{2} = 2{,}5\% = \frac{1}{40}$$

Strumień przepływającej energii zmniejszył się 40 krotnie!

6 Kulka o promieniu $R$, gęstości $\rho$ i cieple właściwym $c_w$ stygnie przez emisję promieniowania od temperatury początkowej $T_0$ do temperatury końcowej $T_k$. Kula jest wykonana z nieprzepuszczalnego dla promieniowania materiału dla którego współczynnik odbicia wynosi $r$. Ile wynosi czas stygnięcia kulki?
$R = 10\,cm$, $\rho = 8\cdot 10^3\,kg/m^3$, $c_w = 450\,J/kg\cdot K$, $r = 0{,}8$, $T_k = 300K$, $T_0 = 1000K$

Rozwiązanie:


Moc wypromieniowana przez kulkę:

$$P = \frac{dE}{dt} = (1-r)\underset{\text{pow. kulki}}{S}\sigma T^4 = 4\pi R^2 (1-r)\sigma T^4$$

Ubytek energii cieplnej kulki przy zmianie temperatury ciała:

$$dE = -mc_w\,dT = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho c_w\,dT$$

Bilans energetyczny:

$$dE = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho c_w\,dT = 4\pi R^2 (1-r)\sigma T^4\,dt,$$

prowadzi to do równania różniczkowego, które jest analogiczne do prawa stygnięcia Newtona:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{3(1-r)\sigma}{R\rho c_w} T^4$$

Możemy je rozwiązać stosując separację zmiennych:

$$\underbrace{\int_{T_0}^{T_k} \frac{dT}{T^4}}_{= -\frac{1}{3}T^3\Big|_{T_0}^{T_k}} = -\frac{3(1-r)\sigma}{R\rho c_w} \int_0^t dt',$$

otrzymujemy

$$t = \frac{R\rho c_w}{9(1-r)\sigma}\left[\frac{1}{T_k^3} - \frac{1}{T_0^3}\right] =$$

$$= \frac{0{,}1 \cdot 8\cdot 10^3 \cdot 450}{9\cdot 0{,}2\cdot 5{,}67\cdot 10^{-8}}\left(\frac{1}{10^2}\right)^3\left[\frac{1}{3^3} - \frac{1}{10^3}\right] s \simeq 1{,}27\cdot 10^5 s =$$

$$= 35{,}3\ h.$$