PODSTAWY FIZYKI IV

10.03.2020

ćwiczenia #3

ZADANIA

1 Oszacowanie czasu życia Słońca

Stała słoneczna $S = 1{,}94 \frac{cal}{cm^2 \cdot min} = 1{,}36 \cdot 10^3 \frac{W}{s^2}$ jest to ilość energii docierająca w jednostce czasu do jednostki powierzchni Ziemi ze Słońca. Zakładając, że powierzchnia Słońca jest w dobrym przybliżeniu ciałem doskonale czarnym obliczyć:

a) temperaturę powierzchni Słońca,

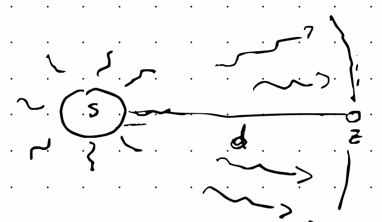
b) masę traconą przez Słońce w ciągu 1 sekundy i czas, po jakim masa Słońca zmniejszy się o 1‰ (porównać z wiekiem Wszechświata).

$d = 1au = 1{,}5 \cdot 10^{11} m$ – odległość Ziemia – Słońce

$R_\odot = 7 \cdot 10^8 m$ – promień Słońca,

$M_\odot = 2 \cdot 10^{30} kg$ – masa Słońca, $\tau_{wszech} \simeq 14$ mld lat – wiek Wszechświata

Rozwiązania:



a) Moc emitowana przez Słońce:

$$P_{tot} = \sigma T_\odot^4 \cdot \underset{\uparrow \text{ pow. Słońca}}{A} = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4$$

równa jest mocy przechodzącej przez sferę o promieniu d orbity Ziemii:

$$P_{tot} = 4\pi d^2 \cdot S,$$

stąd poprzez przyrównanie P_{tot} dostajemy wyrażenie na temperaturę powierzchni Słońca:

$$T_\odot = \sqrt[4]{\frac{S}{\sigma}\left(\frac{d}{R_\odot}\right)^2} = \sqrt[4]{\frac{1{,}36 \cdot 10^3}{5{,}67 \cdot 10^{-8}}\left(\frac{1{,}5 \cdot 10^{11}}{7 \cdot 10^8}\right)^2} K = 5760 K$$

b) Całkowita moc Słońca wynosi

$$P_{tot} = \frac{dE}{dt} = 4\pi d^2 S = 4\pi \cdot (1{,}5)^2 \cdot 10^{22} \cdot 1{,}36 \cdot 10^3 W = 3{,}8 \cdot 10^{26} W$$

Moc wytwarzana przez Słońce jest produktem biegnących w jego wnętrzu reakcji fuzji. Energia wytwarzana przez Słońce jest związana z defektem masy pomiędzy substratami i produktami tej masy. Uwalniana nadwyżka energii jest nazywana energią wiązania.

Przyjmijmy, że maksymalna ilość energii, którą można otrzymać w wyniku fuzji termojądrowej nim stanie się to energetycznie nieopłacalne wynosi 1‰ $M_\odot c^2$ (defekt masy). Oczywiście jest to zgrubne oszacowanie, które jak mamy nadzieję pozwoli oszacować poprawnie rząd wielkości czasu życia Słońca.

Szybkość „spalania" masy wewnątrz Słońca:

$$P_{tot} = \frac{dM_\odot \cdot c^2}{dt} = \dot{M} c^2 \Rightarrow \dot{M} = \frac{P_{tot}}{c^2} = \frac{3,8\cdot 10^{26}\,W}{9\cdot 10^{16}\,m^2/s^2} = 0,42\cdot 10^{10}\,kg = 4\cdot 10^{6}\,\frac{ton}{s}\,,$$

stąd

$$\Delta t = \frac{\Delta M}{\dot{M}} = \frac{10^{-3} M_\odot}{\dot{M}} = \frac{10^{-3}\cdot 2\cdot 10^{30}\,kg}{0,42\cdot 10^{10}\,kg/s} = 4,76\cdot 10^{17}\,s = 1,5\cdot 10^{10}\,lat = 15\text{ mld lat}$$

Oszacowany czas życia Słońca jest rzędu wieku Wszechświata.

Lepsze oszacowanie daje rozważenie reakcji jądrowej

$$4p \longrightarrow \alpha + 26,7\,MeV$$

Spalenie jednego protonu daje 6,675 MeV. Wiedząc, że masa protonu to 938 MeV/c^2 oznacza to, że jeden proton spalany jest z ubytkiem 0,007 jego masy, czyli w każdej sekundzie spalanych jest:

$$\frac{4\cdot 10^6\,ton}{0,007} = 570\cdot 10^6\text{ ton wodoru} \cong 6\cdot 10^{11}\,kg$$

Słońce składa się z ok. 74% wodoru, 25% helu i ok. 1% cięższych pierwiastków. Zakładając, że Słońce wypali się po wyczerpaniu wodoru dostajemy nowe oszacowanie:

$$(0,74\cdot 2\cdot 10^{3})/(6\cdot 10^{11})\,s = 2,5\cdot 10^{18}\,s \simeq 8\text{ mld lat}$$

Współczesne modele wskazują na to, że przewidywany czas życia Słońca jest wynosi 10,8 mld lat, przy czym Słońce aktualnie ma ok. 4,6 mld lat.

Słońce jest gwiazdą ciągu głównego. Za ok. 5 mld lat stopniowo zakumuluje w swym jądrze na tyle dużo helu, że opuści ciąg główny i stanie się czerwonym gigantem zwiększając swe rozmiary i „połknie" Merkurego, Wenus i prawdopodobnie także Ziemię. Ostatecznie Słońce odrzuci zewnętrzną warstwę tworząc mgławicę planetarną i ostatecznie skurczy się tworząc białego karła w którym ciśnienie zdegenerowanego gazu elektronów powstrzyma go od dalszego zapadania.

2 Efekt cieplarniany

Oblicz temperaturę Ziemi wynikającą z równowagi promienistej Słońce – Ziemia. Obliczenia przeprowadzić w trzech przypadkach:

a) Ziemia jako ciało doskonale czarne,

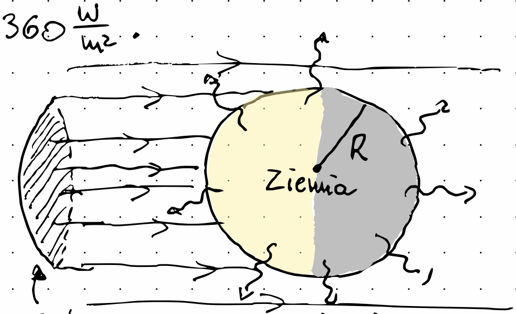
b) Ziemia jako ciało doskonale czarne o albedo wynoszącym $\alpha = 30\%$.

c) Ziemia jako ciało doskonale czarne o albedo wynoszącym $\alpha = 30\%$, która otoczona jest atmosferą pochłaniającą $\varepsilon = 78\%$ emitowanego przez Ziemię promieniowania podczerwonego.

Stała słoneczna wynosi $S = 1360 \frac{W}{m^2}$.

Rozwiązanie:

a) Załóżmy, że promienie słoneczne padają równolegle na powierzchnię Ziemi.



Ziemia wypromieniowuje energię z całej swojej powierzchni:

$$P_{wypromieniowana} = 4\pi R^2 \sigma T_z^4 \leftarrow \text{temp. Ziemi}$$

Ziemia pochłania natomiast promieniowanie docierające ze strony Słońca, czyli padające na przekrój poprzeczny Ziemi (uzasadnienie patrz obok):

$$P_{pochłaniana} = \pi R^2 S$$

W celu utrzymania równowagi promienistej:

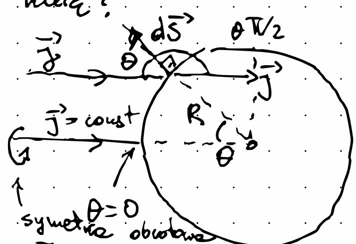
$$P_{wyp} = P_{poch},$$

czyli

$$T_z = \left(\frac{S}{4\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{1360 \frac{W}{m^2}}{4\cdot 5{,}67\cdot 10^{-8}\frac{W}{m^2\cdot K^4}}\right)^{1/4} =$$

$$= 278{,}8\,K = 5{,}8\,°C$$

Rozważmy równoległe pole wektorowe: $\vec{J}$ padające na kulę. Jaki będzie strumień padający na tą kulę?



$$\Phi_J = \int \vec{J}\cdot d\vec{S} =$$

$$= 2\pi R^2 \int_0^{\pi/2} J\cos(\pi-\theta)\sin\theta\, d\theta =$$

$$= -2\pi R^2 J \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta =$$

$$= -2\pi R^2 J \int_0^1 x\,dx = -\pi R^2 J,$$

$\cos\theta = x$

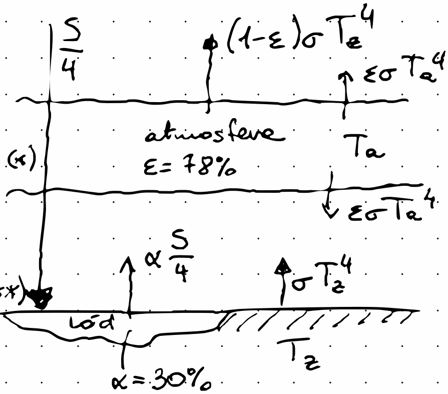
b) Albedo jest własnością powierzchni ciała niebieskiego. Albedo zależy od własności powierzchni na którą pada i jest duże dla lodu i śniegu, a małe dla zbiorników wodnych. Średnia wartość albedo dla Ziemi wynosi $\alpha = 30\%$. Albedo mówi o rozpraszaniu promieniowania i tym różni się od wsp. odbicia. Promieniowanie odbijane od lodu na powierzchni Ziemi powoduje efektywnie zmniejszenie strumienia energii docierającego do Ziemi:

$$P_{poch} = (1-\alpha)\pi R^2 S,$$

czyli w tym przypadku: $T_z = \sqrt[4]{\frac{S(1-\alpha)}{4\sigma}} \simeq 255\,K = -18\,°C$

c) Dzięki temu, że atmosfera jest praktycznie przezroczysta dla promieniowania widzialnego, ale powstrzymuje ok. 78% promieniowania podczerwonego ze względu na obecność w atmosferze wody, CO_2 oraz innych gazów cieplarnianych na Ziemi obserwujemy efekt cieplarniany, który jest istotnym mechanizmem regulującym klimat naszej planety. Rozważymy teraz uproszczony model tego zjawiska.

Równowaga promienista Ziemi (nad atmosferą):



$$S(1-\alpha)\pi R^2 = 4\pi R^2\left[(1-\varepsilon)\sigma T_z^4 + \varepsilon\sigma T_a^4\right] \quad (*)$$

Równowaga promienista Ziemi (przy powierzchni):

$$-S(1-\alpha)\pi R^2 = 4\pi R^2\left[-\sigma T_z^4 + \varepsilon\sigma T_a^4\right] \quad (**)$$

Dodajemy stronami równanie (*) i (**), wtedy

$$0 = 4\pi R^2\left[(1-\varepsilon)\sigma T_z^4 + \varepsilon\sigma T_a^4 - \sigma T_z^4 + \varepsilon\sigma T_a^4\right] =$$

$$= 4\pi R^2\left[-\varepsilon\sigma T_z^4 + 2\varepsilon\sigma T_a^4\right] = 0 \Rightarrow T_a = \frac{1}{2^{1/4}} T_z \quad ({*}{*}{*})$$

Wstawiając $({*}{*}{*})$ do (*) dostajemy:

$$\frac{S(1-\alpha)}{4} = (1-\varepsilon)\sigma T_z^4 + \varepsilon\sigma\frac{T_z^4}{2} = \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sigma T_z^4,$$

czyli

$$T_z = \sqrt[4]{\frac{S(1-\alpha)}{4\sigma(1-\varepsilon/2)}} = \sqrt[4]{\frac{1360 \cdot 0{,}7}{4 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}\left(1-\frac{0{,}78}{2}\right)}}\,K = 288{,}5\,K =$$

$$= 15{,}4°C$$

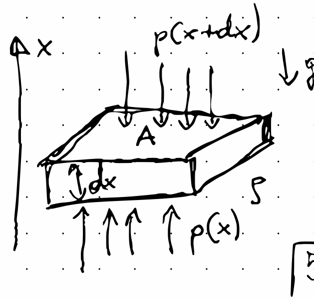
Mierzona średnia wartość temperatury $\langle T \rangle = 287\,K$.

Wzrost pokrywy lodowej powoduje zmniejszenie α i tym samym spadek temperatury. Wzrost zawartości gazów cieplarnianych powoduje wzrost ε i tym samym podwyższanie średniej temperatury Ziemi.

Na przykład, gdy $\varepsilon = 1$ i $\alpha = 0{,}3$, wtedy

$$T_z = 303\,K \simeq 30°C.$$

▶ RÓWNOWAGA HYDROSTATYCZNA



Aby element płynu o objętości $dV = A\,dx$ pozostawał w równowadze siły działające na niego muszą się równoważyć:

$$p(x+dx)A + dm\, g = p(x)A,$$

gdzie $dm = \rho A\, dx$. Prowadzi to do równania równowagi hydrostatycznej:

$$\boxed{\frac{dp}{dx} = -\rho(x)\, g(x)} \qquad (3.1)$$

Najprostsze zastosowanie tego wzoru dotyczy sytuacji, gdy $\rho = const$ oraz $g = const$, wtedy dostajemy

$$\boxed{p(h) = p_0 + \rho g h,} \qquad (3.2)$$

gdzie $h = -x$ jest wysokością słupa cieczy.
Często stosowane jednostki ciśnienia:

Paskal: $Pa = \frac{N}{m^2}$, Bar $= 10^5$ Pa, Atmosfera fizyczna $= 1013$ hPa $=$
Atmosfera techniczna $= 10\,m\,H_2O = 981$ hPa $\} = 760$ mmHg

metrów słupa wody

mm słupa rtęci

ZADANIA

3 Wzór barometryczny

Znaleźć zależność ciśnienia atmosferycznego od wysokości (w pobliżu powierzchni Ziemi) przy założeniu, że temperatura w atmosferze jest stała jest stała, a powietrze jest gazem doskonałym. Przyjąć, że wielkościami znanymi są:

a) ciśnienie p_0 i gęstość ρ_0 powietrza przy powierzchni $(x=0)$,

b) temperatura atmosfery i masa molowa μ powietrza ($\mu_{pow.} \simeq 29\ g/mol$).

Rozwiązanie:

Dla gazu doskonałego znamy równanie stanu o postaci

$$pV = nRT \quad , \quad \text{gdzie } R = 8{,}3145 \frac{J}{mol \cdot K},$$

uniwersalna stała gazowa

Gdy $T = const$, wtedy $pV = p_0 V_0 = const$,

czyli $$\frac{pV}{m} = \frac{p_0 V_0}{m} \Rightarrow \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \Rightarrow \rho(p) = \rho_0 \frac{p}{p_0}$$

Korzystamy z równania (3.1.), przy $g = \text{const}$, wtedy

$$\frac{dp}{dx} = -p\frac{\rho_0}{p_0}g \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0}g\,dx$$

Odcałkowując dostajemy:

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp'}{p'} = -\frac{\rho_0}{p_0}g\int_0^x dx \Rightarrow \boxed{p(x) = p_0\exp\left(-\frac{\rho_0}{p_0}gx\right)} \qquad (3.3)$$

b) $$pV = \underset{\uparrow \text{1 moli}}{n}RT \Rightarrow p = \frac{m}{\mu}R\frac{T}{V} = \underbrace{\frac{m}{V}}_{\rho}\frac{RT}{\mu} = \rho\frac{RT}{\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{RT}{\mu},$$

czyli

$$\boxed{p(x) = p_0\exp\left(-\frac{\mu g}{RT}x\right)} \qquad (3.4.)$$

Dla $T = 0°C$ $\quad \frac{\mu g}{RT} = \frac{29\cdot 10^{-3}}{8{,}31\cdot 273}\, 9{,}8\,m^{-1} \cong 0{,}125\,km^{-1}$,

czyli dla $x = 8$ km dostajemy $\frac{p(x)}{p_0} = e^{-1} \simeq 0{,}37$

4 Ciśnienie wokół planetoidy

Znaleźć rozkład ciśnienia gazu w atmosferze wokół planetoidy o masie M i promieniu R_0 zakładając, że atmosfera znajduje się w stanie równowagi termodynamicznej o stałej temperaturze T.

Rozwiązanie

Zaniedbując grawitację atmosfery dostajemy

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2}\hat{e}_r \qquad \text{dla } r > R_0$$

Dla gazu doskonałego: $\rho(p) = \frac{\mu}{RT}p(r) = \frac{\rho_0}{p_0}p(r)$,

czyli

$$\frac{dp}{dr} = -\rho(p)g(r) = -\frac{GM}{r^2}\frac{\rho_0}{p_0}p = -A\frac{p}{r^2}, \quad \text{gdzie } A = \frac{GM\rho_0}{p_0},$$

czyli

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp'}{p'} = -A\int_{R_0}^{r}\frac{dr'}{r'^2} \Rightarrow \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = A\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0}\right)$$

Ciśnienie wynosi:

$$p(r) = p_0 \exp\left[\frac{GM\rho_0}{p_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0}\right)\right] = p_0 \exp\left[\frac{GM\mu}{RT}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0}\right)\right]$$

Zauważmy, że dla $r \to \infty$ dostajemy:

$$p(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} p_\infty = p_0 \exp\left(-\frac{GM\mu}{RT}\right) = p_0 e^{-g_0 R_0 \mu / RT} > 0,$$

gdzie $g_0 = \frac{GM}{R_0^2}$.

Atmosfera nie może znajdować się w równowadze termodynamicznej, gdyż musiałaby się rozciągać do ∞ i mieć nieskończoną masę.

Jeżeli planetoida z atmosferą będzie znajdować się w próżni to musi ona tracić atmosferę z prędkością zależną od wielkości wyrażenia w wykładniku (im jest większy tym wolniej):

$$g_0 R_0 = \frac{GM}{R_0} = \frac{4\pi R_0^3 G\langle\rho_p\rangle}{3R_0} = \frac{4}{3}\pi R_0^2 G\langle\rho_p\rangle$$

$$\text{wykładnik} = \frac{4}{3}\pi G\langle\rho_p\rangle \frac{\mu R_0^2}{RT}$$

Wartość ciśnienia będzie duża, a to oznacza szybką ucieczkę gazu z atmosfery dla małych wartości modułu wykładnika, czyli dla:

a) planetoidy o małym promieniu R_0,

b) małej masie molowej μ, czyli lekkich gazów (np. H_2),

c) wysokiej temperatury T, co odpowiada szybko poruszającym się cząsteczkom gazu.

Dla Ziemi

$|\text{wykładnik}| \simeq 800$, czyli $p_\infty(\text{ziemia}) = 10^{-340}$ Pa, co jest niezwykle małą wartością, dużo mniejszą od wartości ciśnienia gazu w przestrzeni międzyplanetarnej.

Naturalnie dla H_2 ($\mu = 2$ g/mol) wykładnik ten silnie maleje, a ciśnienie $p_\infty(H_2) \simeq p_0 e^{-55}$.

Dla planetoidy o promieniu $R_0 = \frac{1}{10} R_Z$ wykładnik zmaleje o czynnik 100, a więc:

dla N_2 mamy $p_\infty(N_2) = 3{,}3 \cdot 10^{-4} p_0$

dla H_2 mamy $p_\infty(H_2) = 0{,}61\ p_0$,

a więc nie może być na niej atmosfery.

Przejście do wzoru barometrycznego

dla $r = R_0 + x$, gdzie $x \ll R_0$, mamy:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_0+x} = \frac{1}{R_0}\left(1+\frac{x}{R_0}\right)^{-1} \simeq \frac{1}{R_0}\left(1 - \frac{x}{R_0} + \frac{x^2}{R_0^2} + \ldots\right) \simeq \frac{1}{R_0} - \frac{x}{R_0^2} + \ldots,$$

czyli

$$p(r) = p(R_0+x) = p_0 \exp\left(\frac{GM\rho_0}{p_0}\left(\frac{1}{R_0+x} - \frac{1}{R_0}\right)\right) \simeq p_0 e^{\frac{GM\rho_0}{p_0}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{x}{R_0^2} - \frac{1}{R_0}\right)} =$$

$$= p_0 e^{-g\frac{\rho_0}{p_0}x}, \text{ gdzie } g = \frac{GM}{R_0^2}$$

5 Oszacowanie ciśnienia w centrum Ziemi

Oszacować ciśnienie panujące w centrum Ziemi, traktując ją jako jednorodną kulę o promieniu $R = 6400$ km i średniej gęstości $\rho_0 = 5{,}5$ g/cm^3.

Dużo dokładniejszy wynik można uzyskać uwzględniając następujące fakty wynikające z badań geofizycznych:

a) $$g(r) \approx \begin{cases} g & \text{dla } r \in [R/2, R] \\ \alpha r & \text{dla } r < R/2 \end{cases}$$

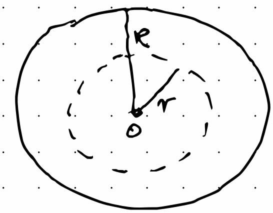
b) Kulę ziemską można w przybliżeniu podzielić na:

- zewnętrzny płaszcz o gęstości $\rho_p \lesssim \rho_0$
- wewnętrzne jądro o gęstości $\rho_j \lesssim 3\rho_0$ oraz promieniu $R_j \simeq R/2$.

Rozwiązanie:

a) Natężenie pola grawitacyjnego wewnątrz Ziemi możemy znaleźć z prawa Gaussa dla grawitacji:

$$\oint_S \vec{g}(r)\cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{wew.}(r)$$



$$-4\pi r^2 g(r) = -4\pi G M(r),$$

gdzie przy stałej gęstości ρ_0:

$$\frac{M(r)}{M(R)} = \left(\frac{r}{R}\right)^3$$

dostajemy, więc $g(r) = 4\pi G \frac{M r^3}{R^3}\frac{1}{4\pi r^2} = G\frac{M}{R^3} r = g_0 \frac{r}{R}$

przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Ziemi

Teraz szukamy ciśnienia:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho_0 g(r) = -\rho_0 \frac{g_0}{R} r \Rightarrow \int_{p(0)}^{p(R)} dp = -\rho_0 \frac{g_0}{R}\int_0^R r\,dr,$$

co daje $p(R) - p(0) = -\frac{\rho_0 g_0}{2} R$

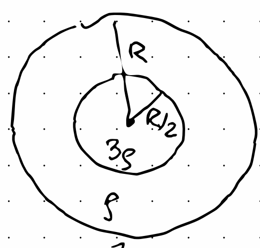
Przyjmując warunek, że na powierzchni Ziemi $p(R) = p_0 \approx 0$, dostajemy

$$p(0) = \frac{\rho_0 g_0}{2} R = \frac{GM}{2R}\rho_0 = \frac{3}{8\pi}\frac{GM^2}{R^4} = 1{,}7\cdot 10^{11}\,\mathrm{Pa} = 1{,}7\ \mathrm{Mbar}.$$

Uzyskany wynik jest trochę zaniżony.

•) Rozważmy bardziej realistyczny model

Wyznaczamy ρ z warunku, że średnia gęstość musi być ρ_0:



- Masa jądra: $M_j = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 3\rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{3}{8}\rho$
- Masa płaszcza: $M_p = \frac{4}{3}\pi\left[R^3 - \left(\frac{R}{2}\right)^3\right]\rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{7}{8}\rho$

Masa Ziemi: $M = M_j + M_p = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{10}{8}\rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{5}{4}\rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$

$$\Rightarrow \rho = \frac{4}{5}\rho_0$$

Ciśnienie w środku pochodzące od jądra możemy zastosować wynik z poprzedniego rachunku (dla stałego ρ i zmiennego $g(r)$), wtedy

$$p_j = p(0) = \frac{\rho_j g_j R_j}{2} = \frac{GM_j}{2R_j^2}\rho_j R_j = \frac{24\pi}{25} G R^2 \rho_0^2 = \frac{27}{50}\frac{GM^2}{\pi R^4}$$

$$\rho_j = 3\rho = \frac{12}{5}\rho_0$$
$$R_j = R/2$$
$$g_j = \frac{GM_j}{R_j^2}$$
$$M_j = \rho_j V_j = \frac{12}{5}\rho_0 \frac{4}{3}\pi R_j^3 = \frac{2}{5}\pi R^3 \rho_0$$

Przyczynek do ciśnienia pochodzący od płaszcza można łatwo obliczyć, bo $\rho = \mathrm{const}$ i $g = \mathrm{const}$, co daje:

$$p_p = \rho_p g_p h = \rho g \frac{R}{2} = \frac{3}{10}\frac{GM^2}{\pi R^4}$$

Sumaryczne ciśnienie w środku Ziemi:

$$p(0) = p_j + p_p = \frac{GM^2}{\pi R^4}\left(\frac{27}{50} + \frac{3}{10}\right) \simeq \frac{21}{25}\frac{GM^2}{\pi R^4} =$$

$$= \frac{56}{25}\underbrace{\frac{3}{8}\frac{GM^2}{\pi R^4}}_{\text{wcześniej obliczona wartość dla jednorodnej kuli} = 1{,}7\ \text{Mbar}} = \frac{56}{25}\cdot 1{,}7\ \text{Mbar} = \underline{\underline{3{,}8\ \text{Mbar}}}$$