Podstawy Fizyki IV

ćwiczenia #1

(25 lutego 2020)

▷ Czynnik całkujący

Rozważmy zwyczajne równanie różniczkowe I-rzędu o postaci: $\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$.

Powyższe równanie możemy rozwiązać posługując się tzw. *czynnikiem całkującym.* Mnożymy obie strony równania przez $\mu(x)$, wtedy $\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x)$. Lewą stronę równania zbieramy do postaci: $(u(x)y)' = u(x)y' + u'(x)y$, czyli w naszym przypadku $u(x) = \mu(x)$ oraz $u'(x) = \mu(x)p(x)$. Prowadzi to do równania na czynnik całkujący: $\mu'(x) = \mu(x)p(x) \Rightarrow \boxed{\mu(x) = \exp\left(\int p(x)\mathrm{d}x\right)}$. Dzięki tej procedurze możemy łatwo otrzymać rozwiązanie naszego problemu:

$$(\mu(x)y)' = \mu(x)q(x) \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)q(x)\mathrm{d}x}.$$

Pojęcie czynnika całkującego pojawi się jeszcze w dalszej części semestru w kontekście II zasady termodynamiki.

▷ Prawo stygnięcia Newtona

Proces dochodzenia do stanu równowagi ciała o pewnej temperaturze T_{pocz} w chwili początkowej, które znajduje się w otoczeniu o temperaturze $T_{ot}(t)$ jest opisany empirycznym *prawem stygnięcia Newtona*:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k\left[T - T_{ot}(t)\right]},$$

gdzie k jest stałą empiryczną charakteryzującą ciało, a także jego kontakt termiczny z otoczeniem. Ogólne rozwiązanie tego problemu możemy znaleźć posługując się metodą omówioną wyżej, co prowadzi do wyniku

$$\boxed{T(t) = \mathrm{e}^{-kt}\int \mathrm{e}^{kt}kT_{ot}(t)\mathrm{d}t}.$$

Gdy $T(t = 0) = T_{pocz}$ oraz $T_{ot}(t) = \mathrm{const} = T_{ot}$ dostajemy: $T(t) = T_{ot} + (T_{pocz} - T_{ot})\mathrm{e}^{-kt}$. Wielkość $\tau = 1/k$ jest tzw. *czasem relaksacji.*

Zadanie 1

Mam butelkę piwa (bezalkoholowego) o temperaturze pokojowej (20° C). Wiem z wcześniejszych pomiarów, że jeżeli wstawię je do lodówki, w której panuje temperatura 0°C, to po 90 minutach osiągnie ono moją ulubioną temperaturę 5°C. Dzisiaj jednak bardzo się śpieszę, postanowiłem więc wstawić piwo do zamrażarki, w której panuje temperatura -10°C. Po jakim czasie powinienem je wyjąć? Ile wynosi czas relaksacji temperatury butelki?

Zadanie 2

Blok metalowy umieszczony jest w otoczeniu, którego temperatura zmienia się według wzoru:

$$T_{ot}(t) = T_\circ + A\sin(\omega t).$$

Początkowa temperatura bloku wynosi $T_\circ$. Znajdź zależność temperatury bloku od czasu w stanie ustalonym.

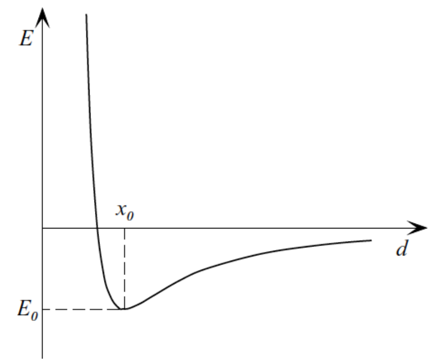
▷ Rozszerzalność termiczna

Zmiana rozmiarów liniowych ciała wraz z temperaturą może być modelowana za pomocą relacji: $\Delta l/l = \alpha\Delta T$, gdzie α jest *współczynnikiem rozszerzalności liniowej*. Przekształcając tą relację dostajemy zależność długości ciała od temperatury: $\boxed{l = l_0[1 + \alpha(T - T_0)]}$, gdzie l_0 to długość ciała w temperaturze T_0.

Analogicznie możemy zdefiniować *współczynnik rozszerzalności objętościowej*: $\Delta V/V = \gamma\Delta T$, skąd po prostym przekształceniu dostajamy relację między objętością ciała, a jego temteraturą: $\boxed{V = V_0[1 + \gamma(T - T_0)]}$. Przedstawione tutaj równania są przybliżone, bo nie uwzględniają zależności α oraz γ od temperatury. Wyniki uzyskiwane za ich pomocą są dokładne tylko w przedziałach temperatur w których zmiany współczynników są małe w porównaniu z ich wartością.

Zadanie 3

Mikroskopowy model rozszerzalności termicznej. Energia potencjalna oddziaływania dwóch atomów danej substancji jest przedstawiona na rysunku obok. Znaleźć średnią odległość między atomami odpowiadającą energii $E > E_0$, zakładając, że:



a) w pobliżu punktu równowagi $x = x_0$ energia potencjalna daje się przybliżyć wzorem

$$E_p(x) \approx a(x - x_0)^2 - b(x - x_0)^3 + E_0,$$

gdzie a i b są stałymi dodatnimi,

b) anharmoniczna poprawka trzeciego rzędu jest mała, tzn. $b|x - x_0| \ll a$,

c) punkty zwrotne $x_{\min}$ i $x_{\max}$ drgań bardzo niewiele różnią się od punktów zwrotnych oscylatora harmonicznego $x^h_{\min}$ i $x^h_{\max}$ (dla $b = 0$),

d) średnia odległość międzyatomowa w czasie drgań może być przybliżona przez średnią arytmetyczną $\langle x \rangle \approx \frac{x_{\min}+x_{\max}}{2}$.

Zadanie 4

Wykazać, że dla materiału anizotropowego zachodzi związek: $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, gdzie γ jest współczynnikiem rozszerzalności objętościowej danego materiału, zaś α_i $(i = 1, 2, 3)$ są współczynnikami rozszerzalności liniowej wzdłuż 3 nierównoważnych (i wzajemnie prostopadłych) kierunków tego materiału.

Zadanie 5

Słupy linii energetycznej oddalone są od siebie o 50 m. Pomiędzy słupami zawieszony jest miedziany przewód, w taki sposób, że w temperaturze -25°C przewód jest naprężony poziomo. Oszacuj zwis przewodu w temperaturze 35°C. Tablicowa wartość współczynnik rozszerzalności liniowej miedzi wynosi $\alpha = 1.6 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$.

Zadanie 6

Bimetal. Do budowy termoregulatorów, ograniczników temperatury i tym podobnych urządzeń stosuje się często urządzenie zwane bimetalem. Jest to pasek złożony z dwóch spojonych ze sobą warstw metali o różnych współczynnikach rozszerzalności. Pasek taki przy ogrzewaniu będzie się wyginał i może w ten sposób zamykać lub otwierać obwód elektryczny. Dany jest bimetal o grubości d, złożony z metali o współczynnikach rozszerzalności liniowej α_1 i α_2 ($\alpha_1 > \alpha_2$). W temperaturze T_0 bimetal jest prosty. Znajdź promień krzywizny bimetalu po ogrzaniu go o ΔT. Wykonaj obliczenia dla: $\alpha_1 = 1.8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$ (mosiądz), $\alpha_2 = 1.2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$ (stal), grubość $d = 1\,\mathrm{mm}$, długość $l_0 = 5\,\mathrm{cm}$, $\Delta T = 100\,\mathrm{K}$.

mgr Piotr Zdybel
`piotr.zdybel@fuw.edu.pl`