Podstawy Fizyki IV

ćwiczenia #2

(3 marca 2020)

▷ Promieniowanie termiczne

Dla ciała promieniującego termicznie ilość energii emitowanej przez jednostkę powierzchni ciała w jednostce czasu i w zakresie częstości od ν do $\nu + \mathrm{d}\nu$ jest dana równaniem:

$$\boxed{dJ = \frac{d^2\mathcal{E}}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S} = E(\nu, T)\mathrm{d}\nu},$$

gdzie $E(\nu, T)$ jest *widmową zdolnością emisyjną*. Jest ona powiązana z *widmową zdolnością absorpcyjną* $A(\nu, T) = P_{abs}/P_{pad}$ (P_{abs} jest mocą promieniowania absorpowaną przez ciało, a P_{pad} jest mocą promieniowania padającego na nie) prawem promieniowania Kirchoffa: $\boxed{E(\nu, T)/A(\nu, T) = e(\nu, T)}$, gdzie $e(\nu, T)$ jest pewną uniwersalną funkcją. Gdy $A(\nu, T) = 1$ $(\forall \nu)$ ciało takie nazywamy *doskonale czarnym* i dla niego uniwersalna funkcja $e(\nu, T)$ jest dana *rozkładem Plancka*:

$$\boxed{e(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\frac{h\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/k_B T} - 1}},$$

gdzie $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ J·s - stała Plancka, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s - prędkość światła w próżni oraz $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K - stała Boltzmanna. Gdy $A(\nu, T) = A = \mathrm{const} \in]0, 1[$ $(\forall \nu)$, wtedy takie ciało nazywamy *doskonale szarym*.

Zadanie 1

Wyznaczyć częstotliwość ν_{max} odpowiadającą maksimum widmowej zdolności emisyjnej ciała doskonale czarnego.

Zadanie 2

Wyznaczyć stałą C_1 w prawie przesunięć Wiena:

$$\lambda_{max} = \frac{C_1}{T}$$

opisującym zależność długości fali λ_{max} odpowiadającej maksimum widmowej zdolności emisyjnej $e(\lambda, T)$ ciała doskonale czarnego od temperatury.

Zadanie 3

Pirometr dwubarwny. Wyznaczyć temperaturę świecącego ciała wiedząc, że stosunek zdolności emisyjnych dla dwóch długości fali λ_1 i λ_2 (leżących w pobliżu maksimum zdolności emisyjnej) wynosi R. Podać wartość liczbową temperatury dla $\lambda_1 = 500$ nm, $\lambda_2 = 400$ nm oraz dla $R = 2$ i $R = 1$.

Zadanie 4

Prawo Stefana-Boltzmanna. Wyprowadzić prawo Stefana-Boltzmanna ze wzoru Plancka.

Wskazówka: Funkcja Γ Eulera jest zdefiniowana jako ($\mathrm{Re}\, z > 0$):

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

Wykonując całkę przez części w powyższym wyrażeniu można pokazać, że $\Gamma(z + 1) = z \cdot \Gamma(z)$, ponadto $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ oraz $\Gamma(1) = 1$.

Funkcja ζ Riemanna dla $s > 1$ jest zdefiniowana jako:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

przy czym $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, a $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

▷ Uzupełnienie: $\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} = \pi^4/90$

Sumę szeregu $\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ możemy wykonać wykorzystując rozwinięcie w szereg Fouriera funkcji $f(x) = x^2$ dla przedziału $x \in [-\pi, \pi]$. Zaczynamy od policzenia dla niej współczynników Fouriera: $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{e}^{inx} \mathrm{d}x = \frac{2\cos(n\pi)}{n^2} = 2(-1)^n n^{-2}$ dla $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ oraz $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3}$. Dostajemy zatem, że $|a_n|^2 = 4n^{-4}$ dla $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ oraz $|a_0|^2 = \frac{\pi^4}{9}$. Wykorzystując twierdzenie Parsevala mamy, że: $\frac{\pi^4}{9} + 2 \times \left[4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{5}$, czyli ostatecznie

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{8} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

▷ Prawo Stefana-Boltzmanna

Emitancja, definiowana jako stosunek strumienia promieniowania (mocy promieniowania) emitowanego przez element powierzchni świecącej do jej wartości, dla ciał doskonale szarych lub czarnych o temperaturze T jest dana *prawem Stefana-Boltzmanna* (patrz ćw. #1):

$$\boxed{J = \varepsilon\sigma T^4},$$

gdzie $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \cdot K^4}}$, a ε jest zdolnością absorbcyjną ciała doskonale szarego ($\varepsilon \in [0,1]$). W ogólności dla ciał rzeczywistych (patrz ćw. #1):

$$J = \int_0^{\infty} A(\nu, T) e(\nu, T) \mathrm{d}\nu \neq \varepsilon\sigma T^4.$$

Dane ciało w ogólności może częściowo przepuszczać, odbijać i pochłaniać promieniowanie. W tym przypadku: $t + r + \varepsilon = 1$, gdzie r to stosunek promieniowania odbitego do padającego, t to stosunek promieniowania przechodzącego do padającego, a ε to stosunek promieniowania pochłanianego do padającego.

Zadanie 5

Model termosu próżniowego. Dwie nieskończone, doskonale czarne płaszczyzny o temperaturach $T_1 = 300$ K i $T_2 = 4$ K umieszczone są naprzeciw siebie.

a) Obliczyć strumień energii (moc na jednostkę powierzchni) między nimi.
b) Między te płaszczyzny ustawiono trzecią osłonę odbijającą $r = 95\%$ padającego promieniowania. Obliczyć temperaturę osłony i strumień energii przepływającej teraz między płaszczyznami.

Zadanie 6

Kulka o promieniu R, gęstości ρ i cieple właściwym c_w stygnie przez emisję promieniowania od temperatury początkowej T_0 do temperatury końcowej T_k. Kula jest wykonana z nieprzepuszczalnego dla promieniowania materiału dla którego współczynnik odbicia wynosi r. Ile wynosi czas stygnięcia kulki? Wykonaj obliczenia dla $R = 10$ cm, $\rho = 8 \cdot 10^3$ kg/m^3, $c_w = 450$ J/kg·K, $r = 0.8$, $T_k = 300$ K i $T_0 = 1000$ K.

mgr Piotr Zdybel
piotr.zdybel@fuw.edu.pl