Podstawy Fizyki IV

ćwiczenia #4

(17 marca 2020)

Wstępy teoretyczne do zadania są przedstawione w notatkach do ćwiczeń.

▷ Elementy teorii kinetycznej

Zadanie 1

Energia wewnętrzna gazu doskonałego. Oblicz ciśnienie wywierane na ścianki naczynia przez gaz jednoatomowy składający się z N cząsteczek o masie m. Zakładamy, że cząsteczki nie oddziałują ze sobą (są niezależne), ale zderzają się doskonale sprężyście ze ściankami naczynia. Cząsteczki poruszają się izotropowo z rozkładem prędkości $f(v)\mathrm{d}v$, który jest unormowany do jedności. Porównaj uzyskany wynik z empirycznym równaniem stanu gazu doskonałego ($pV = nRT$). Jaka jest średnia energia kinetyczna cząsteczek gazu?

Uwaga: Średni kwadrat prędkości cząsteczek gazu wynosi $\left\langle v^2 \right\rangle = \int_0^\infty v^2 f(v)\mathrm{d}v$.

Zadanie 2

Ciśnienie gazu fotonowego. Rozważmy gaz fotonowy we wnęce o temperaturze T. Fotony to cząstki poruszające się niezależnie ze stałą prędkością c, przy czym energia fotonu jest proporcjonalna do jego częstości $E_\nu = h\nu$. Zakładamy, że gęstość energii gazu fotonowego u zależy tylko od temperatury T (i częstości ν, gdy rozważamy fotony z przedziału częstości $[\nu, \nu + \mathrm{d}\nu]$). Znajdź ciśnienie gazu fotonowego.

Uwaga: Możemy zastosować wyrażenie na $\mathrm{d}j$ przedstawione wyżej zastępując w przypadku fotonów $\frac{N}{V}f(v)\mathrm{d}v$ przez $n(\nu,T)\mathrm{d}\nu = \frac{u(\nu,T)}{h\nu}\mathrm{d}\nu$, gdzie $\left(\frac{\partial E(\nu,T)}{\partial V}\right) = u(\nu,T)$, a $n(\nu,T)$ to rozkład liczby fotonów z przedziału częstości $[\nu, \nu + \mathrm{d}\nu]$. Mówiąc inaczej fotony mają ściśle określoną stałą wartość prędkości c, ale są one opisane zadanym rozkładem energii $u(\nu,T)$.

Zadanie 3

Energia wewnętrzna gazu fotonowego. Wiedząc, że gęstość energii gazu fotonowego zależy tylko od temperatury T i że ciśnienie tego gazu wynosi $p = \frac{1}{3}u(T)$ (patrz poprzednie zadanie) wyznacz energię wewnętrzną gazu fotonowego.

Uwaga: Skorzystać z tożsamości, którą udowodnimy na późniejszych ćwiczeniach:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p.$$

Zadanie 4

Efuzja fotonów. Wyznaczyć energię wypromieniowaną w jednostce czasu w przedziale częstości $[\nu, \nu + \mathrm{d}\nu]$ przez mały otworek o powierzchni ΔS wydrążony w ściance naczynia w którym znajduje się promieniowanie w stanie równowagi o temperaturze T.

▷ Równania stanu i gazy rzeczywiste

Zadanie 5

Znaleźć dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia wirialnego $\dfrac{pV}{RT} = 1 + \dfrac{B(T)}{V} + \dfrac{C(T)}{V^2} + \ldots$ dla:

a) równania stanu van der Waalsa: $p(T,V) = \dfrac{RT}{V-b} - \dfrac{a}{V^2}$,

b) równania stanu Dietericiego: $p(T,V) = \dfrac{RT}{V-b} \cdot \exp\left[-\dfrac{a}{RTV}\right]$.

Uwaga: oba równania zostały zapisane dla 1 mola gazu. Aby zapisać te równania dla n moli, trzeba podstawić $V \mapsto V/n$.

Zadanie 6

Znaleźć współrzędne p_k, V_k i T_k punktu krytycznego gazu van der Waalsa oraz tzw. krytyczny współczynnik kompresji $\gamma = \frac{p_k V_k}{RT_k}$, a następnie przedstawić równanie van der Waalsa w zmiennych zredukowanych: $\pi = p/p_k$, $\omega = V/V_k$ i $\tau = T/T_k$.

Zadanie 7

Wiadomo, że równanie van der Waalsa daje współczynnik krytyczny K (gdzie $K \equiv 1/\gamma$), mniejszy od wartości doświadczalnej. Jaki współczynnik krytyczny dawałoby zmodyfikowane równanie postaci $p(T,V) = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{TV^n}$?
Ile powinien wynosić parametr n, aby otrzymać wartość $K = 3.8$? Ile razy objętość krytyczna V_k byłaby większa od parametru b?
Uwaga: Dla $n = 2$ powyższe równanie nosi nazwę równania Berthelota.

mgr Piotr Zdybel
piotr.zdybel@fuw.edu.pl