Podstawy Fizyki IV

ćwiczenia #14

(2 czerwca 2020)

Wstępy teoretyczne do zadań są przedstawione w notatkach do ćwiczeń.

▷ Kwantowe gazy doskonałe

Zadanie 1

Gęstość stanów $g(\varepsilon)$ jest funkcją opisującą liczbę dostępnych stanów kwantowych na jednostkę energii. Dla swobodnych fermionów ($\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2/2m$) o spinie σ oblicz gęstości stanów w granicy termodynamicznej dla $d = 1, 2$ i 3, gdzie d to wymiarowość problemu Porównaj zależność $g(\varepsilon)$ od ε w tych przypadkach.

Zadanie 2

Bardziej realistyczne modele ciała stałego niż model Einsteina konstruujemy przyjmując, iż ciało stałe może być traktowane jako układ $3N$ niezależnych, jednowymiarowych i rozróżnialnych oscylatorów harmonicznych o różnych częstościach własnych. Rozkład częstości charakteryzujemy przez podanie funkcji $g(\omega)$ zdefiniowanej w taki sposób, że $g(\omega)\mathrm{d}\omega$ jest ilością oscylatorów o częstości z przedziału $[\omega, \omega + \mathrm{d}\omega]$. Zgodnie z teorią Debye'a

$$\tilde{g}(\omega) = \begin{cases} \frac{3V}{2\pi^2 v_0^3}\omega^2 & \text{gdy } \omega \leqslant \omega_{max}, \\ 0 & \text{gdy } \omega > \omega_{max}, \end{cases}$$

gdzie v_0 jest "średnią" prędkością dźwięku określoną ze związku

$$\frac{1}{v_0^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_t^3}\right),$$

gdzie v_t jest prędkością fal poprzecznych, a v_l jest prędkością fal podłużnych, zaś wartość ω_{max} wynika ze związku

$$\int_0^{\omega_{max}} \tilde{g}(\omega)\mathrm{d}\omega = 3N.$$

Wyznaczyć ciepło właściwe c_V ciała stałego zgodnie z tą teorią. Zbadać przypadek $T \gg T_D$ oraz $T \ll T_D$, gdzie $T_D = \frac{\hbar\omega_{max}}{k_B}$ jest temperaturą Debye'a. Układ znajduje się w kontakcie z termostatem o temperaturze T.

Zadanie 3

Rozwiązać zagadnienie gazu N nieoddziałujących elektronów w $T = 0$. Wypisać stan podstawowy dla tego układu i znaleźć energię stanu podstawowego. Policzyć ciśnienie tego gazu i porównać je z wynikiem dla gazu doskonałego. Co ten wynik mówi nam o stabilności gazu nieoddziałujących elektronów?

Zadanie 4

Gwiazdy ciągu głównego takie jak Słońce pozostają w równowadze dzięki równowadze pomiędzy ciśnieniem grawitacyjnym starającym się dokonać kolapsu gwiazdy, a ciśnieniem wywieranym przez promieniowanie produkowane w trakcie fuzji termojądrowej w jej wnętrzu. U kresu ich życia fuzja ustaje i zaczyna dominować grawitacja zgniatając je. Jeżeli dana gwiazda jest odpowidnio mało masywna ciśnienie Pauliego zdegenerowanego gazu elektronów w jej wnętrzu jest w stanie zrównoważyć ciśnienie grawitacyjne i zapobiegnąć dalszemu kolapsowi. Powstała w ten sposób gwiazda jest nazywana *białym karłem.* Rozważymy prosty model takich gwiazd i przedyskutujemy ich stabilność.
(a) Energia całkowita białego karła może być zapisana w postaci $E = K + U$, gdzie K jest energią kinetyczną silnie zdegenerowanego gazu elektronów, a U jest grawitacyjną energią potencjalną gwiazdy. Przyjmując najprostszy model w którym gwiazda jest jednorodną kulą o promieniu R i

masie M oblicz ile wynosi U w tym przypadku. Wnętrze białego karła składa się głównie z atomów takich jak C^{12}, O^{16}, etc., które zawierają równą liczbę protonów, neutronów i elektronów, czyli $M \approx 2Nm_p$, gdzie N jest liczbą elektronów, a m_p jest masą protonu ($m_p \approx m_n$, m_n - masa neutronu). Wzbudzenia termiczne dla zdegenerowanego gazu fermionów mogą zachodzić tylko w pobliżu powierzchni Fermiego, która dla olbrzymiej liczby fermionów jest pomijalna z wnętrzem morza Fermiego. Oznacza to, że możemy przybliżyć zdegenerowany gaz elektronów w białym karle przyjmując, że jego temperatura wynosi zero (mimo iż powierzchnia typowego białego karła ma temperaturę 25000 K!). Korzystając z tego przybliżenia oblicz K zakładając, że elektrony w tym przypadku są opisywane relacją dyspersji $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2/2m_e$, gdzie m_e to masa elektronu.
(b) Znajdując minimum energii całkowitej E białego karła znajdź równowagowy promień R_* takiej gwiazdy. Jak zależy uzyskany promień w funkcji masy gwiazdy? Wyraź uzyskany wynik przy pomocy masy Słońca $M_\odot$ i jego promienia $R_\odot$ w postaci $\frac{R_*}{R_\odot} = C \times f(\frac{M}{M_\odot})$, gdzie C to jakaś stała liczbowa, a $f(\cdot)$ to pewna funkcja.
(c) Im większą masę ma gwiazda tym większą muszą mieć energię kinetyczną elektrony w jej wnętrzu, aby zrównoważyć ciśnienie grawitacyjne. Oznacza to, że dla dostatecznie ciężkich gwiazd elektrony trzeba będzie traktować relatywistycznie, tj. $\varepsilon_k = \sqrt{\hbar^2 k^2 c^2 + m_e^2 c^4}$, gdzie c to prędkość światła. W przypadku ultrarelatywistycznym, tj. $p \gg m_e c$ uwzględniając dwa pierwsze wyrazy w rozwinięciu powyższego pierwistka w ε_k oblicz energię kinetyczną K ultrarelatywistycznego silnie zdegenerowanego gazu elektronów.
(d) W przypadku ultrarelatywistycznym dla odpowiednio dużych mas gwiazdy M jej kolaps spowodowany ciśnieniem grawitacyjnym nie może zostać zrównoważony przez ciśnienie zdegenerowanego gazu w jej wnętrzu. Znajdź wartość masy krytycznej M_c przy której wygrywa przyciąganie grawitacyjne i wyraź ją przy pomocy masy Słońca $M_\odot$. Wynik ten jest nazywany *granicą Chandrasekhara*, przy czym w swojej oryginalnej pracy z 1931 roku Chandrasekhar uwzględnił, że rozkład masy w realistycznej gwieździe nie jest jednorodny uzyskując tym samym wynik $M = 1.4M_\odot$. Wynik ten jest niezywkle ważny dla astronomii obserwacyjnej. Mając białego karła w układzie podwójnym z inną masywną gwiazdą następuje transfer masy w kierunku białego karła. Osiągając masę przewidwaną przez Chandrasekhara wybucha on dając początek *supernowej typu Ia* o ściśle określonej jasności (jasność supernowej zależy od masy wybuchającej gwiazdy). Oznacza to, że tego typu supernowa może być wykorzystana jako *świeca standardowa* za pomocą której można wyznaczyć odległość do takiego obiektu.

mgr Piotr Zdybel
piotr.zdybel@fuw.edu.pl