Zadania domowe z Podstaw Fizyki IV

seria #10

(20 maja 2020)

Rozwiązanie jednego z tych zadań będzie zbierane we wtorek 26.05.2020. Powodzenia!

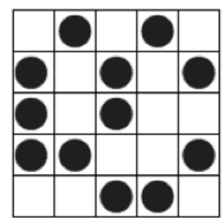
Zadanie 1

Mamy transport 1000 kg pomidorów o rozkładzie liczby sztuk N od masy określonym wzorem: $dN = A \cdot m \cdot \exp\left(-m/M\right) \cdot dm = F(m) \cdot dm$, gdzie $M = 30\,\text{g}$.

a) Gdzie leży maksimum funkcji rozkładu $F(m)$?
b) Jaką funkcją $f(m)$ określony jest udział masy pomidorów z przedziału $[m, m{+}dm]$ w całkowitej masie pomidorów? Wzór przedstawić w postaci prawdopodobieństwa $P(m)$, unormowanego do jedności.
c) Gdzie leży maksimum rozkładu $f(m)$?
d) Kontrahent potrzebuje pomidorów o masach zawartych pomiędzy 27 g a 33 g. Ile kilogramów takich pomidorów możemy mu sprzedać? Oszacować wynik jako $f(m) \cdot \Delta m$ i porównać z wynikiem dokładnym otrzymanym przez całkowanie $f(m)$.

Zadanie 2

Znaleźć liczbę "mikrostanów" układu N nierozróżnialnych kulek rozmieszczonych w pudełku z V przegródkami (V oraz N definiują "makrostan" układu). Wykonać obliczenia dla $V = 20$ i $N = 10$ za pomocą ścisłego wzoru oraz wykorzystując wzór Stirlinga: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.



Zadanie 3

Rozważyć układy N niezależnych cząstek:

a) klasycznych,
b) kwantowych o spinie całkowitym (tj. bozonów),
c) kwantowych o spinie połówkowym (tj. fermionów).

Zakładając, że pojedyncza cząstka może przebywać w R stanach jednocząstkowych, obliczyć, ile wynosi liczba mikrostanów każdego z wymienionych układów.

Wskazówka: Zadanie to można sprowadzić do kombinatorycznego problemu rozmieszczania kul w pudełkach. Cząstki klasyczne należy traktować jako rozróżnialne, natomiast kwantowe jako nierozróżnialne. Poza tym należy wziąć pod uwagę, że zgodnie z zasadą Pauliego żadne 2 cząstki kwantowe (nierozróżnialne) o spinie połówkowym nie mogą znajdować się w tym samym stanie jednocząstkowym.

Zadanie 4

Rozważyć układ składający się z dwóch odizolowanych od siebie części: A oraz B, z których każda zawiera dwie rozróżnialne cząstki mogące przebywać w dyskretnych stanach energetycznych o energiach będących całkowitą wielokrotnością pewnego "kwantu" ε. Niech energie podukładów wynoszą odpowiednio $E_A = 5\,\varepsilon$ i $E_B = \varepsilon$.

a) Obliczyć ile wynosi objętość przestrzeni fazowej (liczba mikrostanów Ω_{A+B}) opisanego układu.
b) Jak zmieni się liczba mikrostanów tego układu, jeśli dopuścimy swobodny przepływ energii pomiędzy podukładami A i B (tzn. usuniemy adiabatyczną przegrodę pomiędzy podukładami)?
c) Przyjmując tzw. hipotezę Boltzmanna, że w równowadze termodynamicznej wszystkie mikrostany realizujące dany makrostan układu izolowanego są jednakowo prawdopodobne (hipoteza chaosu), policzyć jakie jest prawdopodobieństwo, że po usunięciu przegrody energia podukładu A wzrośnie?
d) Jaki podział energii między podukładami A i B jest najbardziej prawdopodobny (tzn. odpowiada stanowi równowagi układu $A + B$)?

Zadanie 5

Obliczyć entropię jednowymiarowego łańcucha przedstawionego na rysunku, przy założeniu, że składa się on z N elementów ($N \gg 1$) o długości ℓ każdy. Przyjąć, że odległość pomiędzy początkowym i końcowym punktem tego łańcucha wynosi L.