Zadania domowe z Podstaw Fizyki IV

seria #11 (dodatkowa)

(5 czerwca 2020)

Seria ta jest nieobowiązkowa i ma pomóc w przygotowaniu się do egzaminu końcowego.

Zadanie 1

Rozpatrz dwa izolowane układy rozróżnialnych, nieruchomych i nieoddziałujących cząstek. Każda cząstka znajduje się w jednym z trzech stanów o energiach: $-\varepsilon$, 0, ε. Pierwszy układ (układ **A**) zawiera jedną cząstkę, a jego całkowita energia wynosi $E_A = \varepsilon$. Drugi układ (układ **B**) zawiera trzy cząstki, a jego całkowita energia wynosi $E_B = -\varepsilon$.

a) Policz liczbę mikrostanów całości złożonej z obu izolowanych układów.
b) Układy doprowadzono do kontaktu ze sobą tak, że mogą one wymieniać energię. Jaka jest teraz liczba mikrostanów?
c) Ile wynosi teraz najbardziej prawdopodobna energia układu **A**?
d) Ile wynosi entropia całego układu w punktach a) i b) ?

Wsk.: w zadaniu tym nie jest wymagane podanie ogólnych wzorów opisujących liczbę mikrostanów dla dowolnej liczby cząstek i wartości E_A oraz E_B.

Zadanie 2

Cząstki pewnego układu mogą zajmować tylko trzy następujące stany energetyczne: jeden stan podstawowy o energii 0, dwa stany o energii E i trzy stany o energii $2E$. Stwierdzono, że w warunkach równowagi termodynamicznej średnia energia jednej cząstki jest równa $2E/3$. Jaka jest temperatura układu? Jakie jest prawdopodobieństwo znalezienia cząstki o energii E?

Zadanie 3

W chmurach gazu międzygwiezdnego znajdują się czasem molekuły cyjanu (CN). W cząsteczce tej, przy energii $4.7 \cdot 10^{-4}$ eV powyżej stanu podstawowego, znajdują się trzy najniżej leżące rotacyjne stany wzbudzone. Astronomiczne pomiary spektroskopowe wykazały, że w pewnej chmurze średnio na każde 10 cząstek CN w stanie podstawowym, 3 inne cząstki znajdują się w jednym z tych trzech stanów wzbudzonych. Oblicz temperaturę tej chmury.

Zadanie 4

Cząstki pewnego układu mogą występować tylko w dwóch stanach: w stanie podstawowym o energii 0 i w stanie wzbudzonym o energii E. W stanie podstawowym cząstka ma wartość składowej z momentu pędu $J_z = -\frac{1}{2}$, a w stanie wzbudzonym $J_z = \frac{1}{2}$. Stwierdzono, że w stanie równowagi średnia wartość energii jednej cząstki wynosi $\langle E \rangle = E/4$. Jaka jest temperatura układu? Oblicz średnią wartość składowej J_z momentu pędu jednej cząstki.

Zadanie 5

Stała dielektryczna ε wyraża się wzorem: $\varepsilon = 1 + \dfrac{N\langle p_{ez}\rangle}{\varepsilon_0 E_{el}}$, gdzie N jest liczbą cząsteczek na jednostkę objętości, E_{el} – natężeniem pola elektrycznego, zaś $\langle p_{ez}\rangle$ – średnim rzutem elektrycznego momentu dipolowego cząsteczek ośrodka na kierunek pola elektrycznego $\vec{E}_{el}$. Doświadczalnie stwierdzono, że stała dielektryczna ε gazów, których cząsteczki mają niezerowy trwały moment dipolowy $\vec{p}_e$ jest liniową funkcją odwrotności temperatury. Oznacza to, że $\langle p_{ez}\rangle$ także powinnien być liniową funkcją odwrotności temperatury. Wiedząc, że energia potencjalna dipola elektrycznego w jednorodnym polu elektrycznym $\vec{E}_{el}$ dana jest wzorem: $E_p = -\vec{p}_e \cdot \vec{E}_{el}$ obliczyć średnią wartość rzutu elektrycznego momentu dipolowego $\langle p_{ez}\rangle$ w polu elektrycznym, w równowadze z termostatem o temperaturze T. Wykazać, że w granicy $E_{el}/T \to 0$ (tj. słabe pole, wysoka temperatura) wynik ten jest proporcjonalny do $1/T$.

Zadanie 6
Dla gazu o małej gęstości lub w wysokiej temperaturze, tak że $\lambda_T^3 n \to 0$, średnie obsadzenie stanu i wyraża się przez

$$\langle n_i \rangle = z \exp(-\beta\varepsilon_i)$$

niezależnie od tego czy gaz składa się z fermionów czy bozonów. Miomo, że ta zależność ma klasyczną postać, spektrum energetyczne ε jest wciąż dyskretne (kwantowemechaniczne).
a) Pokaż, że $z = N/Q$, gdzie $Q = \sum_i \exp(-\beta\varepsilon_i)$ jest kanoniczną sumą statystyczną.
b) Pokaż, że $U/N = -\frac{\partial \ln Q}{\partial \beta}$.
c) Dla cząsteczki wieloatomowej wkład do energii mają ruch translacyjny i wewnętrzne stopnie swobody takie, jak obroty i oscylacje $\varepsilon = \varepsilon_{trans} + \varepsilon_{rot} + \varepsilon_{osc}$. Pokaż, że suma statystyczna separuje się i że ciepło właściwe rozkłada się na sumę niezależnych członów:

$$Q = Q_{trans} Q_{rot} Q_{osc}, \quad c_V = c_{trans} + c_{rot} + c_{osc},$$

gdzie indeksy dotyczą wkładów od translacyjnych, rotacyjnych i oscylacyjnych stopni swobody.
Uwaga: Nie ma jednej przyjętej konwencji jak oznacza się sumę statystyczną w danym zespole. Na przykład sumę statystyczną w zespole kanonicznym często oznacza się literą Q lub Z i w różnych podręcznikach mogą te oznaczenia być różne.

Zadanie 7
Prosty model energii rotacyjnej daje $\varepsilon_{\ell,m} = \hbar^2 \ell(\ell+1)/2I$, gdzie $\ell = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $m = -\ell, -\ell+1, \ldots, 0, \ldots, \ell-1, \ell$, a I to moment bezwładności. Zatem

$$Q_{rot} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \exp(-\frac{\beta\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2I}).$$

a) Dla $k_B T \ll \hbar^2/2I$ zostaw tylko dwa pierwsze człony w Q_{rot}. Pokaż, że

$$\frac{c_{rot}}{k_B} \approx 3 \left(\frac{\beta\hbar^2}{I} \right) \exp(-\beta\hbar^2/I).$$

b) Dla $k_B T \gg \hbar^2/2I$ przybliż sumę po ℓ przez całkę. Pokaż, że

$$\frac{c_{rot}}{k_B} \approx 1.$$

c) Narysuj jakościowy wykres U/N i c_{rot} jako funkcji temperatury. Czy c_{rot} dąży do swojej asymptotycznej wartości z dołu czy z góry?

Zadanie 8
Energia oscylacyjna dana jest wzorem $\varepsilon_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, gdzie $n = 0, 1, 2, \ldots$, aω jest częstością drgań.
a) Pokaż, że

$$\frac{c_{osc}}{k_B} = \exp(-\beta\hbar\omega) \left(\frac{\beta\hbar\omega}{1 - \exp(-\beta\hbar\omega)} \right)^2.$$

Narysuj jakościowy wykres c_{osc} jako funkcji temperatury.
b) Znajdź średnią wartość $\langle n + 1/2 \rangle$ oraz średni kwadrat fluktuacji $\left\langle (n+1/2)^2 \right\rangle - \langle n + 1/2 \rangle^2$.

Zadanie 9
Temperatura w centrum Słońca jest rzędu 10^7 K, a koncentracja elektronów wynosi tam około $10^{32}/\mathrm{m}^3$. Czy do elektronów tych można zastosować klasyczną statystykę Boltzmana, czy raczej należy traktować je jako zdegenerowany gaz Fermiefo o $T = 0$, czy też żadne z tych przybliżeń nie jest w tym przypadku odpowiednie?

Zadanie 10

Ciężkie jądro o liczbie masowej A można przedstawić jako gaz swobodnych fermionów o równej liczbie protonów i neutronów, zawartych w kuli o promieniu $R = r_0 A^{1/3}$, gdzie $r_0 = 1.4 \times 10^{-13}$ cm. Oblicz energię fermiego iśrednią energię przypadającą na nukleon w MeV.

Zadanie 11

Rozważ gaz N cząstek o spinie 1/2 o statystyce Fermiego, zamkniętych w objętości V, w zerze bezwzględnym. Zależność między energią i pędem ma postać $E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$, gdzie m jest masą spoczynkową.

a) Znajdź energię Fermiego dla gęstości n.

b) Zdefiniuj energię wewnętrzną U jako średnią wartość $E - mc^2$, a ciśnienie p jako średnią siłę na jednostkę powierzchni wywieraną na doskonale odbijającą ściankę pojemnika. Otrzymane wyrażenia przedstaw w postaci całek. Całek nie trzeba dalej obliczać.

c) Pokaż, że $pV = 2U/3$ dla małych gęstości i $pV = U/3$ dla dużych gęstości. Podaj ryterium określania małych i dużych gęstości.

d) W kosmosie może istnieć gaz neutrin (i antyneutrin) [neutrina są bezmasowymi fermionami o spinie 1/2]. Oblicz energię Fermiego (w eV) takiego gazu, zakładając, że gęstość gazu jest równa jednej cząstce na cm^3.

Zadanie 12

Gwiazdę neutronową można opisac jako doskonały gaz Fermiego neutronów w temperaturze bezwzględnego zera , w polu grawitacyjnym ciężkiego środka masy M.

a) Pokaż, że cisnienie p gazu w polu grawitacyjnym ciężkiej masy M spełnia równanie $\mathrm{d}p/\mathrm{d}r = -\gamma M \rho(r)/r^2$, gdzie γ jest stałą grawitacyjną, r jest odległością od masy, a $\rho(r)$ jest gęstością gazu.

b) Pokaż, że $p = a\rho^{5/3}$, gdzie a jesy stałą, i znajdź ρ jako funkcję odległości od środka.

Wsk.: Znajdź zależność p i ρ od potencjału chemicznego gazu Fermiego.