Zad. 1 (ćwiczenia 10)

środa, 25 stycznia 2017 16:58

4. Rozpatrujemy układ fermionowy o jednym orbitalu, który może być nieobsadzony (stan $|0>$) lub obsadzony (stan $|1>= a^\dagger|0>$). Pokazać, że najbardziej ogólne przekształcenie kanoniczne operatorów a i $a^\dagger$: $a, a^\dagger \to a', a'^\dagger$ spełniające warunki $[a', a'^\dagger]_+ = 1$, $(a')^2 = 0$, $(a'^\dagger)^2 = 0$ jest równoważne obrotowi w przestrzeni spinowej.

Wsk.: wprowadzić przyporządkowanie:

$$\sigma_x = a + a^\dagger, \quad \sigma_y = i(a - a^\dagger), \quad \sigma_z = 2a^\dagger a - 1,$$

gdzie σ_i , $i = x, y, z$ macierze Pauliego.

Najogólniejsza postać transformacji jest wielomianem o poniższej postaci:

$$\begin{cases} a' = ua + va^+ + w a^+a + q \\ a'^+ = u^* a^+ + v^* a + w^* a^+ a + q^* \end{cases}$$

Przetransformowane operatory winny spełniać warunki: $(a')^2 = (a'^+)^2 = 0$

$$(a')^2 = uv(1 - a^+a) + uwa(1 - a\cancel{a}^+) + uqa +$$
$$+ uv\, a^+a + vq\, a^+ + vw\, a^+(1 - \cancel{a^+}a) +$$
$$+ w^2 a^+a(1 - a\cancel{a}^+) + qwa^+a + qua + qva^+ +$$
$$+ qwa^+a + q^2 = 0$$

Przy a^+a mamy: $uv - uv + w^2 + qw + qw = 0$

$$\Rightarrow 2q + w = 0$$

Przy a^+ mamy:

$$vq + vw + qv = 0 \Rightarrow 2q + w = 0$$

Przy a mamy:

$$uw + uq + qu = 0 \Rightarrow 2q + w = 0$$

Przy 1 mamy:

$$q^2 + uw = 0$$

czyli

$$q = \pm i\sqrt{uw} \qquad w = -2q$$

Kolejny warunek

$[a', a'^+] = 1 \Rightarrow$ ale żmudne, nieco skomplikowane rachunki $\Rightarrow |u| + |w| = 1$

wykorzystujemy wskazówkę:

$$a = (\sigma_x - i\sigma_y)/2 \quad , \quad a^+ = (\sigma_x + i\sigma_y)/2$$

$$a^+a = \left(\frac{\sigma_x + i\sigma_y}{2}\right)\left(\frac{\sigma_x - i\sigma_y}{2}\right) = \frac{1}{4}\Big[\underbrace{\sigma_x^2}_{=1} + \underbrace{\sigma_y^2}_{=1} - i\sigma_x\sigma_y + i\sigma_y\sigma_x\Big] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2 + 2\sigma_z\right) \Rightarrow \qquad \sigma_z = 2a^+a - 1$$

$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k$

$$[\sigma_i, \sigma_j]_+ = 2\delta_{ij} \mathbb{1}$$

$$e^{\frac{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}_\alpha}{2}} \sigma_\alpha e^{-\frac{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}_\alpha}{2}} = \sum_\beta{}' R_{\alpha\beta} \sigma_\beta = \sigma_\alpha'$$

ortogonalne macierz obrotów

Zatem σ_α' - zachowuje relację antykomutacji

$$e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}} = \mathbb{1}\cos\alpha + i\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{\alpha}|}\sin\alpha =$$

$$= \left(\cos\alpha - \alpha_z \sin\alpha \frac{i}{|\vec{\alpha}|}\right) + a\left(\frac{i}{|\vec{\alpha}|}(\alpha_x + i\alpha_y)\right)\sin\alpha +$$

$$+ a^+\left(\frac{i}{|\vec{\alpha}|}(\alpha_x - i\alpha_y)\right)\sin\alpha + \frac{2i}{|\vec{\alpha}|}\sin\alpha\, a^+ a$$

co widać, że będzie prowadzić do postulowanej transformacji