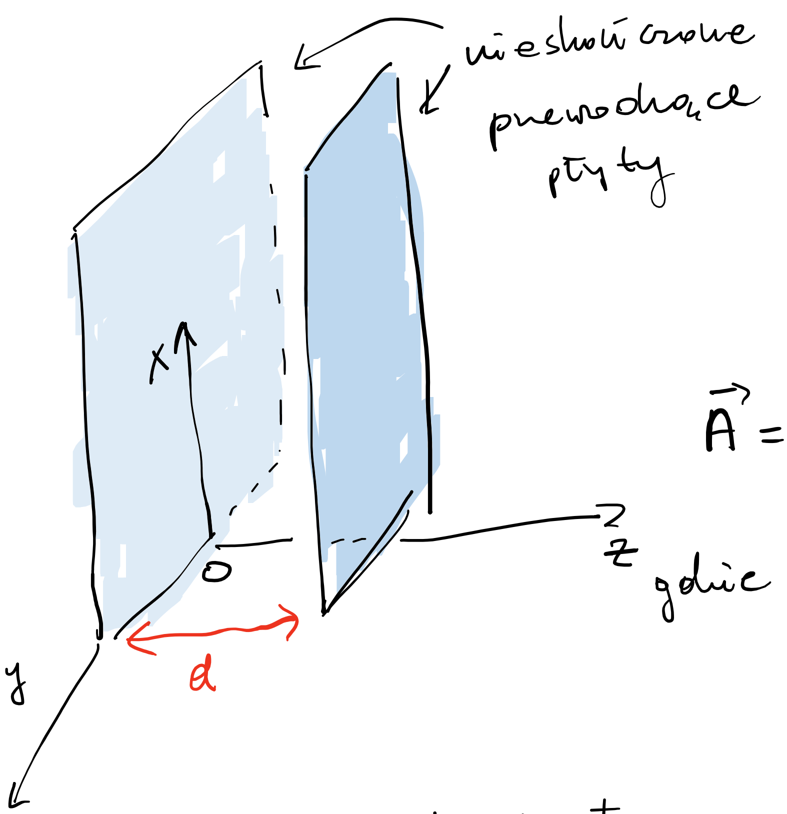
Zad. 2 (ćwiczenia 10)

środa, 25 stycznia 2017 22:47

Wyprowadzenie wyrażenia na siłę Casimira działającą pomiędzy dwoma nieskończonymi oraz przewodzącymi, płytami, które są względem siebie równoległe.



Nakładamy periodyczne warunki brzegowe na kierunek *x* i *y*. Ponadto chcemy, aby składowa styczna pola elektrycznego i normalna składowa pola magnetycznego znikały na powierzchni przewodzących płyt.

Warunki te są spełnione dla potencjału wektorowego:

$\vec{A}$ o $k_z \neq 0$

$$\vec{A} = \vec{\varepsilon}\, e^{ik_x x} e^{ik_y y} \sin(k_z z)\, e^{i\omega_k t},$$

gdzie $k_x = n_x \frac{2\pi}{L_x}$, $k_y = n_y \frac{2\pi}{L_y}$

$n_x, n_y \in \mathbb{Z}$

natomiast $k_z = n_z \frac{\pi}{d}$, $n_z \in \mathbb{Z}_+$

$\vec{\varepsilon}$ - wektor polaryzacji

$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$, ponadto $\vec{k} \cdot \vec{\varepsilon} = 0$

pokazane niżej

W takim przypadku wektor pola elektrycznego jest proporcjonalny do potencjału wektorowego:

$$E = i\omega_k \vec{\varepsilon}\, e^{ik_x x} e^{ik_y y} \sin(k_z z)\, e^{-i\omega_k t}$$

Natomiast pole magnetyczne jest dane równaniem:

$$\vec{B} = \vec{k} \times \vec{\epsilon} \; e^{ik_x x} \, e^{ik_y y} \cos(k_z z)\, e^{-i\omega_k t}$$

Znikanie stycznej składowej natężenia pola elektrycznego jest zapewnione przez sinus w wyrażeniu, natomiast znikanie normalnej pola magnetycznego wymaga, aby;

$$\vec{e}_z \cdot (\vec{k} \times \vec{\epsilon}) = 0 \;, \quad \text{czyli} \quad \vec{k} \cdot \vec{\epsilon} = 0$$

Następnie korzystając z prawa Gaussa $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ dostajemy, że

$$k_x \epsilon_y - k_y \epsilon_x = 0 \qquad \forall \vec{k} \;\; z \;\; k_z \neq 0$$

$$k_x \epsilon_x + k_y \epsilon_y + k_z \epsilon_z = 0$$

Energia pola wewnątrz wnęki dla $k_z \neq 0$ (oznaczona przez prim) jest dana jako

$$E'_{cav} = \hbar c \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n_x 2\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y 2\pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{d}\right)^2 \right]^{1/2}$$

$E = c\hbar k$ dla pojedynczego fotonu

Przechodzimy do granicy $L_x \to \infty$, $L_y \to \infty$ zamieniając przy tym sumowanie na całkowanie:

$$\frac{E'_{cav}}{L_x L_y} = \hbar c \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk_y}{2\pi} \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 \right]^{1/2}$$

Wykonujemy całkowanie po kącie wektora falowego w płaszczyźnie XY (pozbywając się jednej z całek), przy czym wprowadzamy zmienną *u* po której całkowanie pozostaje:

$$u = \frac{(k_x^2 + k_y^2)\, d^2}{\pi^2} = k_\perp^2 d^2 / \pi^2$$

otrzymujemy:

$$\frac{E'_{cav}}{S} = \frac{\hbar c \pi^2}{4d^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} du \, (u+n^2)^{1/2}$$

Uwzględniamy teraz wkład pochodzący od $k_z = 0$, co prowadzi do

$$\frac{E_{cav}}{S} = \frac{\hbar c \pi^2}{4d^3} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} du \, (u+n^2)^{1/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} du \sqrt{u} \right]$$

Wyrażenie to jest rozbieżne podobnie jak energia pola swobodnego poza wnęką. Mamy nadzieję, że ich różnica jest skończona:

$$\frac{E_{free}}{V} = \hbar c \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k$$

zatem

$$\frac{E_{free}}{V} = \frac{\hbar c}{(2\pi)^3} \int d^2k_\perp \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \sqrt{k_\perp^2 + k_z^2} =$$

$$= \frac{\hbar c}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dk_\perp \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{k_\perp^2 + k_z^2} =$$

$$= \frac{\hbar c \pi^2}{4d^4} \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} du \sqrt{u + x^2}$$

$x = \frac{k_z}{d}$

Teraz odejmujemy te wkłady od siebie nawzajem

$$\frac{\Delta E}{S} = \frac{E_{cav}}{S} - \frac{E_{free}}{S} =$$

$$= \frac{\hbar c \pi^2}{4d^3} \left[\frac{1}{2} \int_0^{\infty} du \sqrt{u} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} du \, (u+n^2)^{1/2} - \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} du \, (u+x^2)^{1/2} \right]$$

Niech $$f(x) = \int_0^\infty du \, (u+x^2)^{1/2}$$

Wtedy korzystając z twierdzenia Eulera-McLaurina:

$$\sum_{i=m+1}^{n} f(i) - \int_m^n f(x)dx = \frac{f(n)-f(m)}{2} + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(m)\right) + R$$

liczby Bernoulliego

reszta

nad rozwinięcie

W naszym przypadku

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \int_0^\infty f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\left[f(0) - f(\infty)\right] + \frac{1}{12}\left[f'(\infty) - f'(0)\right] + - \frac{1}{720}\left[f'''(\infty) - f'''(0)\right] + \dots$$

$$f(x) = \int_0^\infty du \, (u+x^2)^{1/2} = \int_{x^2}^{\infty} dt \sqrt{t} ,$$

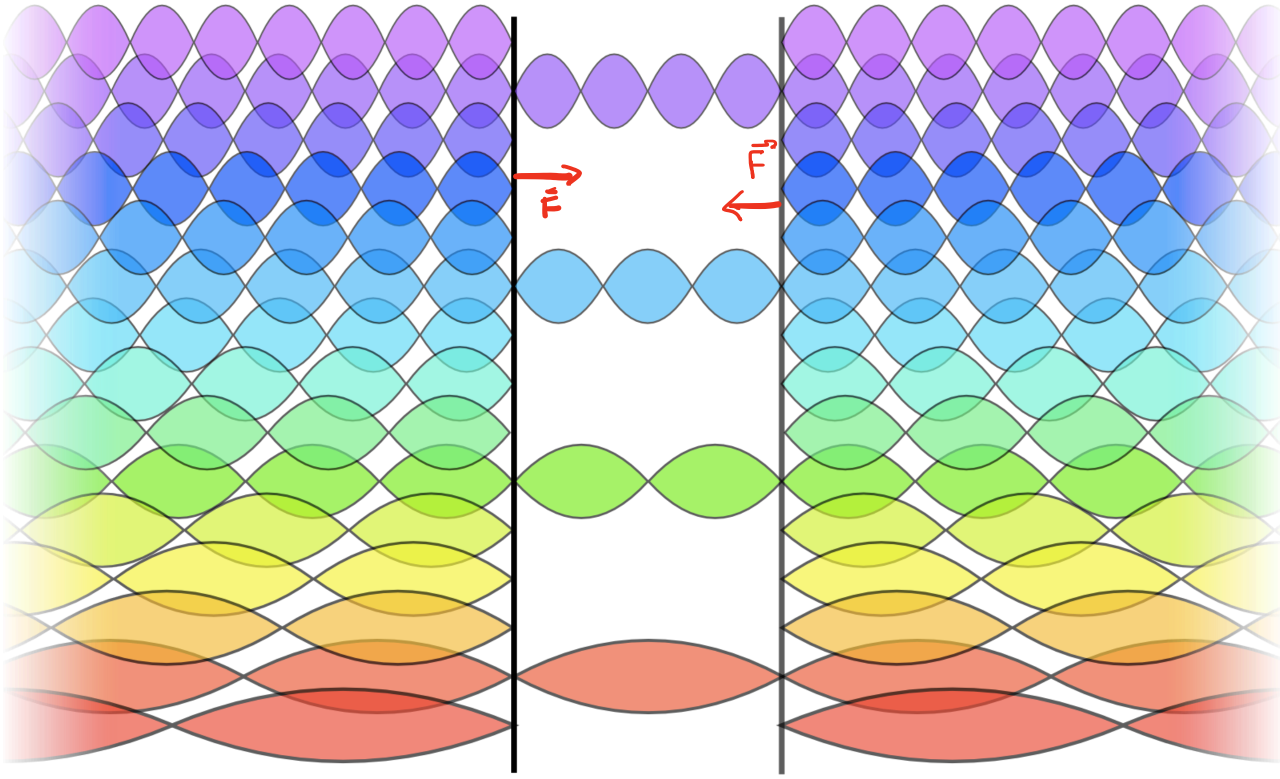
czyli $f'(x) = -2x^2$ $\quad f''(x) = -4x$, $\quad f'''(x) = -4$

Ostatecznie

$$\frac{\Delta E}{S} \simeq -L^2 \hbar c \frac{\pi^2}{720} \frac{1}{d^3}$$

$$p = -\frac{\partial E}{\partial V} = -\hbar c \frac{\pi^2}{240} \frac{1}{d^4}$$

← ciśnienie wywierane na płytę


$\vec{F}$
$\vec{F}$