Zad. 1 (ćwiczenia 13)

czwartek, 26 stycznia 2017 15:41

1. Za pomocą transformacji Bogoljubowa wyznaczyć stany własne Hamiltonianu:

$$\hat{H} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (t_1 a_i^\dagger a_{i+1} + t_1 a_{i+1}^\dagger a_i + t_2 a_i a_{i+1} + t_2 a_{i+1}^\dagger a_i^\dagger - 2B a_i^\dagger a_i$$

Zapiszemy powyższy hamiltonian w przestrzeni korzystając z metody ciasnego wiązania przy założeniu, że stała sieci wynosi 1. Ponadto na pędy nakładamy periodyczne warunki brzegowe.

Wychodzimy z hamiltonianu

$$\hat{H} = \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{N/2} \Big[t_1 a_i^+ a_{i+1} + t_1 a_{i+1}^+ + t_2 \left(a_i a_{i+1} + a_{i+1}^+ a_i \right) + -2B a_i^+ a_i \Big]$$

$$k_n = \frac{2\pi n}{N} \qquad n \in \mathbb{Z} \leftarrow \text{periodyczne warunki brzegowe}$$

Ciasne wiązanie:

$$a_m = \frac{1}{N} \sum_n e^{i \frac{2\pi n}{N} m} a_{k_n} = \left\{ \begin{array}{c} \text{gęstość stanów} \\ \Delta k_n = \frac{2\pi}{N} \end{array} \right\} =$$

$$= \sum_{n=-N/2}^{N/2} e^{i k_n m} \frac{\Delta k_n}{2\pi} a_{k_n} \xrightarrow[N \to \infty]{} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikm} a_k \frac{dk}{2\pi}$$

$$\sum_m a_m^+ a_{m+1} = \sum_m \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_1}{2\pi} \int \frac{dk_2}{2\pi} e^{i(k_1 - k_2)m} e^{ik_1} a_{k_2}^+ a_{k_1} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_2}{2\pi} N \delta(k_1 - k_2) e^{ik_1} a_{k_2}^+ a_{k_1} =$$

$$= \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} N}_{\sum_k} e^{ik} a_k^+ a_k = \sum_k e^{ik} a_k^+ a_k$$

$$\sum_k a_m a_{m+1} = \frac{1}{2} \sum_k (a_m a_{m+1} - a_{m+1} a_m) = -i \sum_k \sin k \, a_k a_{-k}$$

$$\sum_k (a_m^+ a_{m+1} + a_{m+1}^+ a_m) = \sum_k 2 \cos k \, a_k^+ a_k$$

$$\hat{H} = \sum_k \left(2(t_1 \cos k - B) a_k^+ a_k - i t_2 \sin k \, a_k a_{-k} + i t_2 \sin k \, a_{-k}^+ a_k \right)$$

Wprowadzamy $a_k = e^{i\pi/4} b_k$, $a_k^+ = e^{-i\pi/4} b_k^+$ wtedy

$$\hat{H} = \sum_k \left(2(t_1 \cos k - B) a_k^+ a_k + t_2 b_k b_{-k} + H.c. \right)$$

Przeprowadzamy transformację Bogoliubowa

$$\begin{cases} b_k = u_k c_k + v_k c_{-k}^+ \\ b_k^+ = u_k c_k^+ + v_k c_{-k} \\ b_{-k}^+ = -v_k c_k + u_k c_{-k}^+ \\ b_{-k} = -v_k c_k^+ + u_k c_{-k} \end{cases} \qquad u_k^2 + v_k^2 = 1$$

$$\hat{H} = \sum_k (t_1 \cos k - B)\left(u_k^2 c_k^+ c_k + u_k v_k (c_k^+ c_{-k}^+ + c_{-k} c_k) +\right.$$

$$\left. + v_k^2 c_{-k} c_{-k}^+ \right) + t_2 \sin k \left(u_k^2 c_k c_{-k} + u_k v_k (c_k^+ c_{-k} - c_k c_k^+) + \right.$$

$$\left. - v_k^2 c_{-k}^+ c_k^+ \right) + H.c$$

Chcemy, aby wyrazy pozadiagonalne pojawiały się w przetransformowanym

hamiltonianie:

$$2u_k v_k (t_1 \cos k - B) + (v_k^2 - u_k^2) t_2 \sin k = 0 \quad / : v_k^2$$

dostajemy równanie kwadratowe na $\frac{u_k}{v_k}$

$$\frac{u_k}{v_k} = \frac{B - t_1 \cos k \pm \sqrt{(t_1 \cos k - B)^2 + t_2^2 \sin^2 k}}{t_2 \sin k}$$

więc

$$\hat{H} = \sum_k \left[2(t_1 \cos k - B)(u_k^2 - v_k^2) + 4 t_2 \sin k \, v_k u_k \right] c_k^+ c_k + \text{const} =$$

$$= \text{const} + \sum_k \epsilon_k c_k^+ c_k$$

korzystając z $\frac{u_k}{v_k}$ i $v_k^2 + u_k^2 = 1$

dostajemy

$$\epsilon_k = 2\sqrt{(t_1 \cos k - B)^2 + t_2^2 \sin^2 k}$$