Zad. 1 (ćwiczenia 14)

piątek, 27 stycznia 2017 14:19

Funkcje Greena i diagramy Feynmana

Definicja funkcji Greena:

$$\mathcal{G}(\vec{p}, \tau-\tau') = -\left\langle T_\tau \, a_{\vec{p}\sigma}(\tau)\, a^{+}_{p\sigma}(\tau') \right\rangle$$

operator uporządkowania chronologicznego

Będziemy posługiwali się częstościami Matsubary:

$$\mathcal{G}(\vec{p}, i\omega_n) = \int_0^\beta d\tau \; e^{i\omega_n \tau}\, \mathcal{G}(\vec{p}, i\omega_n),$$

gdzie

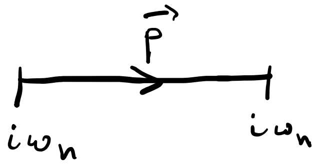
$$\omega_n = \begin{cases} (2n+1)\pi/\beta & \text{dla fermionów} \\ 2n\pi/\beta & \text{dla bozonów} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Równanie Dysona:

$$\mathcal{G}(\vec{p}, i\omega_n) = \frac{\mathcal{G}^{(0)}(\vec{p}, i\omega_n)}{1 - \Sigma(\vec{p}, i\omega_n)\, \mathcal{G}^{(0)}(\vec{p}, i\omega_n)}$$

Reguły Feynmana:

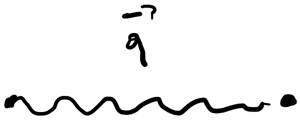
1. Narysuj wszystkie topologicznie różne diagramy, przy czym poszczególnym liniom przyporządkuj:



propagator elektronu

$$G^{(0)}(\vec{p}, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\vec{k}}},$$

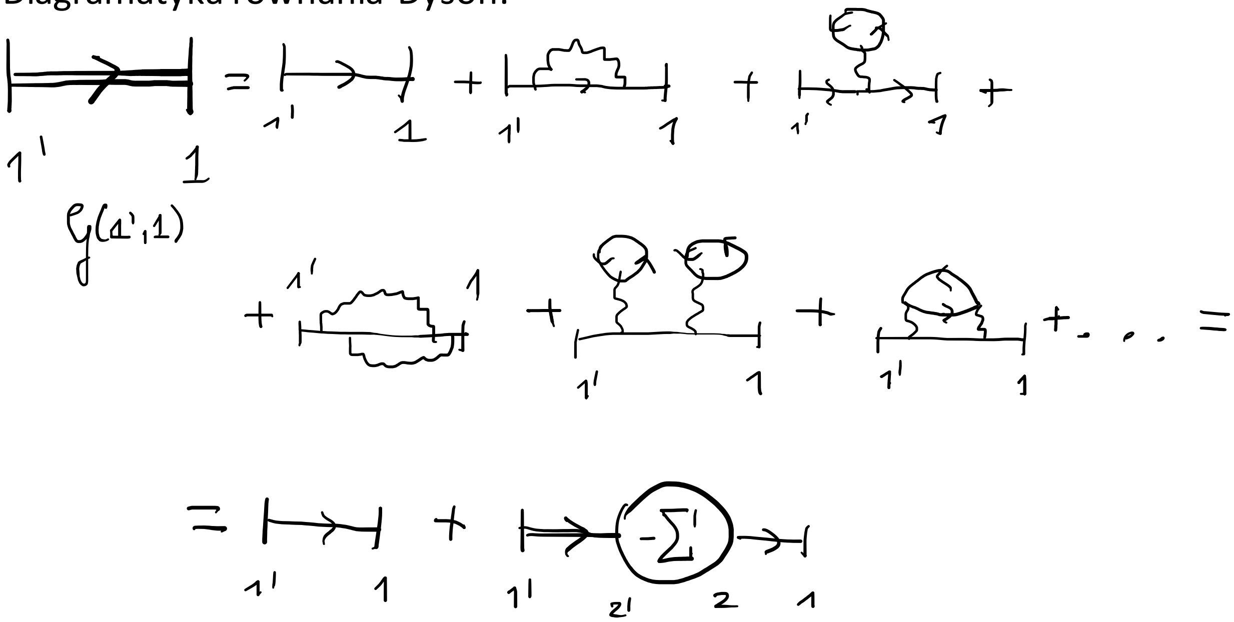
$$\text{gdzie} \quad \xi_{\vec{k}} = \frac{k^2}{2m} - \mu$$



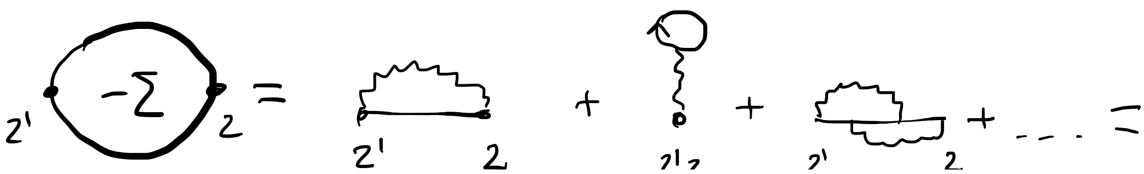
$$v_{\vec{q}} = \frac{4\pi e^2}{q^2}$$

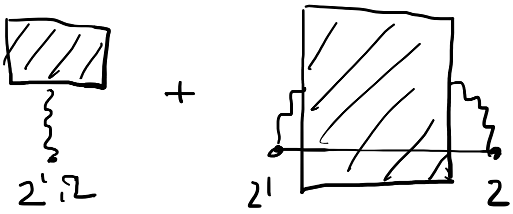
2. Dobierz pędy w każdej linii tak, aby zachowane były energie i pędy w każdym wierzchołku.
3. Dla linii równoczasowych dopisz czynnik uzbieżniający $e^{i\omega_n \eta}, \eta \to 0^+$
4. Scałkuj i wysumuj po wszystkich współrzędnych wieszchołkowych.
5. Pomnóż przez $(-1)^F$, gdzie F to liczba pętli fermionowych.

Diagramatyka równania Dyson:



$$G(1',1) = G^{(0)}(1',1) - G(1',2')\Sigma(2',2)G^{(0)}(2,1)$$



selfenergia $=$  $+$ inne

Σ_H − część Hartree (lokalne w czasie i przestrzeni)

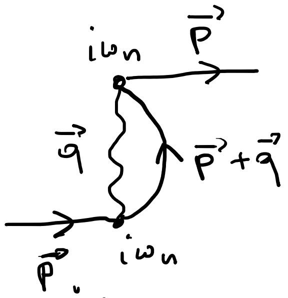
Σ_X − część wymienna (lokalne w czasie)

Zajmiemy się zagadnieniem jednorodnego gazu elektronowego opisywanego hamiltonianem:

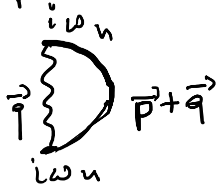
$$\hat{H} = \sum_{\vec{p},\sigma} \xi_{\vec{p}}\, a^{+}_{\vec{p}\sigma} a_{\vec{p}\sigma} + \frac{1}{2V} {\sum_{\vec{k},\vec{k}'}}' \sum_{\vec{q}\neq 0} \sum_{\sigma\sigma'} v_{\vec{q}}\, a^{+}_{\vec{k}+\vec{q},\sigma} a^{+}_{\vec{k}'-\vec{q},\sigma'} a_{\vec{k}'\sigma'} a_{\vec{k}\sigma}$$

$$\xi_{\vec{k}} = \frac{k^2}{2m} - \mu \qquad v_{\vec{q}} = \frac{4\pi e^2}{q^2}$$

Wykonamy rachunek w pierwszym rzędzie dla części wymiennej selfenergii:



q $i\omega_n$ $\vec{p}+\vec{q}$ $i\omega_n$ linia równowagowa

$$\Sigma_X^{(1)}(\vec{p}) = $$  $$= \underbrace{\frac{1}{\beta}\sum_n \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}}_{\text{sumowanie po wsp. wierzchołkowych}} v_q\, G^{(0)}(\vec{p}+\vec{q}, i\omega_n)\, e^{i\omega_n 0^+}$$

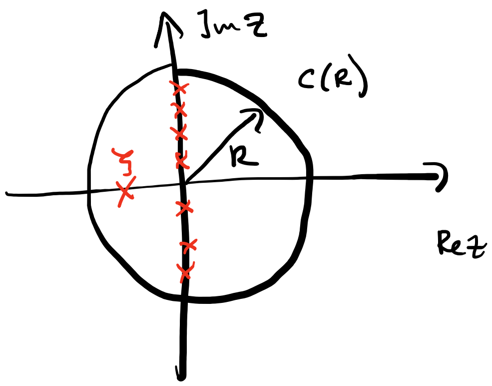
Mamy do wykonania sumę Matsubary:

$$\frac{1}{\beta}\sum_n \mathcal{G}^{(0)}(\vec{p}+\vec{q})\, e^{i\omega_n 0^+} = \frac{1}{\beta}\sum_n \frac{e^{i\omega_n 0^+}}{i\omega_n - \xi_{\vec{p}+\vec{q}}} \quad \text{, gdzie}$$

$$\xi_{\vec{k}+\vec{q}} = \frac{(\vec{k}+\vec{q})^2}{2m} - \mu$$

Sumę policzymy przy wykorzystaniu twierdzenia o residuach:

$$I = \lim_{R\to\infty} \oint_{C(R)} \frac{dz}{2\pi i \beta} \frac{e^{z0^+}}{z-\xi_{p+q}} f(z)$$



taka, że ma punkty osobliwe odpowiadające wyrazom liczonej sumy, np.

$$\beta n_F(z) = \frac{\beta}{1+e^{\beta z}}$$

$$\frac{1}{1+e^{i\omega_n\beta}} = \frac{1}{1+e^{i(2n+1)\pi}} = \frac{1}{1+(-1)} \quad \forall n\in\mathbb{Z}$$

$i\omega_n$ są biegunami prostymi $f(z)$.

Liczymy residua:

$$z_n = \frac{i(2n+1)}{\beta}\pi \qquad R_n = \frac{1}{\beta}\frac{e^{i\omega_n 0^+}}{i\omega_n - \xi_{\vec{k}+\vec{q}}} \quad \forall n\in\mathbb{Z}$$

$$z_\alpha = \xi_{\vec{p}+\vec{q}} \qquad R_\alpha = n_F(\xi_{\vec{p}+\vec{q}})$$

wtedy

$$I = \sum_n R_n + R_\alpha = \frac{1}{\beta}\sum_n \frac{e^{i\omega_n 0^+}}{i\omega_n - \xi_{\vec p+\vec q}} + n_F(\xi_{\vec p+\vec q}) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

czyli

$$\frac{1}{\beta}\sum_n \frac{e^{i\omega_n 0^+}}{i\omega_n - \xi_{\vec p+\vec q}} = -n_F(\xi_{\vec p+\vec q})$$

więc

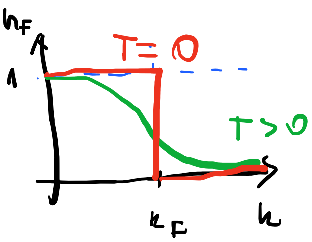
$$\Sigma_x^{(1)}(\vec k) = -\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, v_q\, n_F(\xi_{\vec k+\vec q})$$

Wprowadzamy: $\vec p = \vec k + \vec q \Rightarrow \vec q = \vec p - \vec k$

$$\Sigma_x^{(1)}(\vec k) = -\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, \frac{4\pi e^2}{|\vec p-\vec k|^2}\, n(\xi_{\vec p}) =$$

$$= -\frac{e^2}{\pi}\int_0^{k_F} p^2 dp \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{k^2+p^2+2kp\cos\theta} =$$

granica niskotemp.



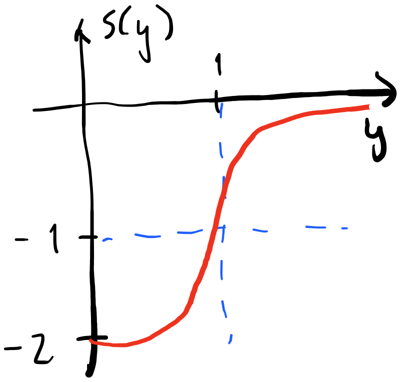
$$= -\frac{e^2}{\pi k}\int_0^{k_F} p\,dp\, \ln\left|\frac{k+p}{k-p}\right| =$$

$$= -\frac{e^2 k_F}{\pi}\left(1+\frac{1-y^2}{2y}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right)$$

$y = \frac{k}{k_F}$

Gdy $k = k_F$, wtedy $y = 1$ oraz $\Sigma_x^{(1)}(k_F) = -\frac{e^2 k_F}{\pi}$

Wprowadzamy $S(y) = 1 + \frac{1-y^2}{2y}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|$



$$\frac{dS(y)}{dy} = \frac{1}{2y}\left(\frac{1+y^2}{y} \ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| - 2 \right)$$

Wprowadza się pojęcie masy efektywnej:

$$\left(\frac{m}{m_*}\right) = 1 + \frac{\partial}{\partial \xi_k} \Sigma_x^{(1)}(\vec{k}) = \frac{e^2 m}{\pi k} \frac{dS(y)}{dy}$$

$$\left(\frac{m}{m_*}\right) \xrightarrow[k \to k_F]{} \infty$$

Rozbieżność jest skutkiem ograniczenia rachunku tylko do pierwszego rzędu. Można tą rozbieżność usunąć przy pomocy renormalizacji masy.

Energia związana z oddziaływaniem wymiennym:

$$E_x^{(1)} = \frac{1}{2N_e} \sum_{\vec{k}\sigma} n_F(\vec{k}) \Sigma_x^{(1)}(\vec{k}) = -\frac{3}{4} \frac{e^2 k_F}{\pi}$$