Zad. 1 (ćwiczenia 1)

sobota, 10 grudnia 2016 15:30

1. Komutator jako operator różniczkowy:

   a) Pokazać, że dla każdego operatora X oraz iloczynu operatorów A i B spełniona jest "reguła Leibniza":

   $$[X, AB] = [X, A]B + A[X, B]$$

   b) Wykazać, że jeśli $[x, p] = i\hbar$, to:

   $$[x, p^n] = i\hbar n p^{n-1},\ [p, x^n] = -i\hbar n x^{n-1}.$$

   c) Jeśli $f(p)$ i $g(p)$ analityczne funkcje operatorów x i p, to $[x, f(p)] = i\hbar f'(p)]$ i $[p, g(x)] = -i\hbar g'(x)]$. Ogólnie, jeśli $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$, to

   $$[A, f(B)] = [A, B]\ f'[B].$$

a) $[X, AB] = XAB - ABX = [X,A]B + AXB +$

$+ A[X,B] - AXB = [X,A]B + A[X,B]$

b) $[x, p] = i\hbar$

$[x, p^2] = p[x,p] + [x,p]p = 2i\hbar p$

$[x, p^3] = p[x, p^2] + [x,p]p^2 = 3i\hbar p^2$

...

$[x, p^n] = p[x, p^{n-1}] + i\hbar p^{n-1} = n i\hbar p^{n-1}$

Analogicznie: $[p, x^n] = -i\hbar n x^{n-1}$

c) Gdy $f(p)$ - analityczna, wtedy $f(p) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p^n$

$[x, f(p)] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n [x, p^n] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n i\hbar n p^{n-1} =$

$$= i\hbar f'(p)$$

Analogicznie $[p, g(x)] = -i\hbar\, g'(x)$

$$[A,[A,B]] = 0 = [B,[A,B]] \Rightarrow [A,B] = \text{const} = \zeta$$

$$[A, f(B)] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n [A, B^n] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n \zeta B^{n-1} = [A,B]\, f'(B)$$

$[A, B^0] = 0$, $[A, B] = \zeta$, $[A, B^2] = B[A,B] + [A,B]B = 2\zeta B = [A,B]\, f'(B)$

itd.