Zad. 2 (ćwiczenia 1)

sobota, 10 grudnia 2016 16:00

2. Rozpatrujemy układ dwóch spinów połówkowych A i B w stanie singletowym.
   1) Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania w wyniku pomiaru na spinie A wielkości $S_{Az} = \hbar/2$, jeśli nie wykonano pomiaru na spinie B?
   2)Pomiar spinu B wykazał wartość $S_{Bz} = \hbar/2$.
   Jaki będzie wtedy wynik pomiaru S_{Az} na spinie A?
   Jaki będzie wynik jeśli zmierzymy S_{Ax} na spinie A?

1) S – całkowity spin

Stan singletowy to taki, że $S=0$

$$|s\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B\right)$$

$$\hat{S}_{Az} \otimes \mathbb{1}_B = \left(\frac{\hbar}{2}\right) \mathbb{P}_{A\uparrow} \otimes \mathbb{1}_B + \left(-\frac{\hbar}{2}\right) \mathbb{P}_{A\downarrow} \otimes \mathbb{1}_B \quad ,$$

gdzie $\mathbb{P}_{A\updownarrow} = |\updownarrow\rangle_A\langle\updownarrow|$ – operator rzutowy

Prawdopodopieństwo uzyskania wyniku pomiaru $\hat{S}_{Az} = \hbar/2$ wynosi

$$p_{A\uparrow} = \langle s|\, \mathbb{P}_{A\uparrow} \otimes \mathbb{1}_B \,|s\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\left[{}_A\langle\uparrow|\uparrow\rangle_A\langle\uparrow|\uparrow\rangle_A \otimes {}_B\langle\downarrow|\downarrow\rangle_B \right] = \frac{1}{2}$$

2) • W wyniku pomiaru spinu cząstki B stan układu ulega kolapsowi, czyli

$$|s\rangle \xrightarrow[\text{kolaps}]{} |k\rangle = N\, \mathbb{P}_{B\uparrow}|s\rangle$$

stała normalizacyjna

$$\mathbb{P}_{B\uparrow}|s\rangle = |\uparrow\rangle_B\langle\uparrow| \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B$$

Ponadto $\langle k|k\rangle = \frac{1}{2}N^2 = 1 \Rightarrow N = \pm\sqrt{2}$

bez znaczenia, bo znak zmienia tylko fazę

$$\langle k|\hat{S}_{Az}|k\rangle = \langle k|\frac{\hbar}{2}\mathbb{P}_{A\uparrow} - \frac{\hbar}{2}\mathbb{P}_{B\downarrow}|k\rangle = -\frac{\hbar}{2}$$

• $S_{Ax} = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$ wartości własne: $\frac{\hbar}{2}$, $-\frac{\hbar}{2}$

Znajdujemy wektory własne:

$$|x\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right)$$

$$|x\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right)$$

Zatem $\hat{S}_{Ax} = \left(\frac{\hbar}{2}\right)\mathbb{P}_{Ax\uparrow} + \left(-\frac{\hbar}{2}\right)\mathbb{P}_{Ax\downarrow}$, gdzie

$$\mathbb{P}_{x\updownarrow} = |x\updownarrow\rangle\langle x\updownarrow|$$

$$\langle k|\hat{S}_{Ax}|k\rangle = \langle k|\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle_A\langle\downarrow| + \frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle\langle\uparrow|k\rangle = 0$$