## Zad. 3 (ćwiczenia 1)

sobota, 10 grudnia 2016 16:47

3. Rozważyć układ fizyczny, który opisany jest przez wektory w 3-wymiarowej przestrzeni rozpiętej przez bazę złożoną z wektorów $|u_1>, |u_2>$ i $|u_3>$. W bazie tej macierz hamiltonianu $\hat{\mathrm{H}}$ oraz obserwabli $\hat{\mathrm{B}}$ mają postać:

$$\mathbf{H} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie $\omega_0$ i $b$ - stałe rzeczywiste. W chwili początkowej układ był w stanie:

$$|\psi(0)> = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1> + \frac{1}{2}|u_2> \frac{1}{2}|u_3>$$

a) Wyznaczyć stan $|\psi(t)>$ w chwili $t$

b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w chwili $t$ układ ma energię $2\hbar\omega_0$?

c) Podać możliwe wartości pomiaru wielkości reprezentowanej przez macierz **B** oraz ich prawdopodobieństwa w zależności od czasu.

a) $$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} |u_n\rangle,$$ gdzie

$$\hat{H}|u_n\rangle = E_n|u_n\rangle$$ , czyli

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i2\omega_0 t} |u_1\rangle + \frac{1}{2} e^{-i\omega_0 t} |u_2\rangle + \frac{1}{2} e^{-i2\omega_0 t} |u_3\rangle$$

b) $$\langle u_1|H|u_1\rangle = 2\hbar\omega_0, \quad \langle u_3|H|u_3\rangle = 2\hbar\omega_0$$

$$\mathbb{P}_{E=2\hbar\omega_0} = |u_1\rangle\langle u_1| + |u_3\rangle\langle u_3|$$

$$\langle\psi(t)|\, \mathbb{P}_{E=2\hbar\omega_0}|\psi(t)\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i2\omega_0 t}\langle u_1| + \frac{1}{2} e^{i\omega_0 t}\langle u_2| + \frac{1}{2} e^{i2\omega_0 t}\langle u_3|\right)$$

$$\left(|u_1\rangle\langle u_1| + |u_3\rangle\langle u_3|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i2\omega_0 t}|u_1\rangle + \frac{1}{2} e^{-i\omega_0 t}|u_2\rangle + \frac{1}{2} e^{-i2\omega_0 t}|u_3\rangle\right) = \frac{3}{4}$$

c) Szukamy wartości własnych operatora $B$

$$\det(B-\lambda \mathbb{1}) = \det\begin{bmatrix} b-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2b \\ 0 & 2b & -\lambda \end{bmatrix} = (b-\lambda)\left[\lambda^2 - 4b^2\right] = 0$$

$$\lambda_1 = b \quad , \quad \lambda_2 = 2b \quad , \quad \lambda_3 = -2b$$

Szukamy wektorów własnych:

$$|b\rangle = |u_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 2b$

$$\begin{bmatrix} -b & 0 & 0 \\ 0 & -2b & 2b \\ 0 & 2b & -2b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |2b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_2\rangle + |u_3\rangle\right)$$

$\lambda = -2b$ - analogicznie dostajemy $|-2b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_2\rangle - |u_3\rangle\right)$

Prawdopodobieństwo uzyskania $b$:

$$\mathbb{P}_b = |b\rangle\langle b| = |u_1\rangle\langle u_1|$$

$$P_b = \langle \psi(t)| \, \mathbb{P}_b \, |\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}$$

Prawdopodobieństwo uzyskania $2b$:

$$\mathbb{P}_{2b} = |2b\rangle\langle 2b| = \frac{1}{2}\left[ |u_2\rangle\langle u_2| + |u_3\rangle\langle u_3| + |u_2\rangle\langle u_3| + |u_3\rangle\langle u_2| \right]$$

$$P_{2b} = \left\langle \psi(t) \right| \mathbb{P}_{2b} \left| \psi(t) \right\rangle = \frac{1}{4}\left[1 + \cos(\omega_0 t)\right]$$

Prawdopodobieństwo uzyskania $z_6$:

$$\mathbb{P}_{z6} = |z6\rangle\langle z6| = \frac{1}{2}\left[\,|u_2\rangle\langle u_2| + |u_3\rangle\langle u_3| - |u_2\rangle\langle u_3| - |u_3\rangle\langle u_2|\,\right]$$

$$P_{z6} = \langle \psi(t)|\,\mathbb{P}_{z6}\,|\psi(t)\rangle = \frac{1}{4}\left[1 - \cos(\omega_0 t)\right]$$