Zad. 1 (ćwiczenia 2)

sobota, 10 grudnia 2016 18:52

4. Sferycznie symetryczne rozwiązanie swobodnego równania Schrödingera;

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\Psi(\boldsymbol{r}) = E\Psi(\boldsymbol{r})$$

ma postać:

$$\Psi(\boldsymbol{r}) =< \boldsymbol{r}|klm >= j_l(kr)Y_l^m(\phi,\theta),$$

gdzie r,ϕ,θ - współrzędne sferyczne $\boldsymbol{r}$, Y_l^m - harmoniki sferyczne unormowane do delty Kroneckera:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \; Y_l^m(\phi,\theta) Y_{l'}^{m'}(\phi,\theta) = \delta_{mm'}\delta_{ll'},$$

a $\hbar k = \sqrt{2mE}$ - pęd radialny. Sferyczne funkcje Bessel'a $j_l(z)$ mają następujące rozwinięcie asymptotyczne gdy $z \to \infty$:

$$j_l(z) \sim \frac{1}{z}\sin(z - l\pi/2).$$

Pokazać, że

$$< k'l'm'|klm >= N_{klm}\delta(k-k')\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

i wyznaczyć N_{klm}.

Alternatywne rozwiązanie względem rozwiązania z ćwiczeń:

$$\psi(\vec{r}) = j_l(kr)\,Y_l^m(\phi,\theta), \quad \text{gdzie}$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} > 0 \quad - \text{pęd radialny}$$

Normowalność stanów rozproszeniowych:

$$j_l(kr) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)}{kr}$$

$$\langle klm|k'l'm'\rangle = \langle k|k'\rangle\,\delta_{ll'}\,\delta_{mm'}, \quad \text{przy skorzystaniu}$$

z ortogonalności harmonik sferycznych

$$\langle k|k'\rangle = \int_0^\infty dr\, \cancel{r^2}\, \frac{\sin^k\left(k'r - \frac{l\pi}{2}\right)\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)}{kk'\cancel{r^2}} =$$

$$= \frac{1}{kk'}\int_0^\infty dr\, \frac{1}{4}\left(e^{-i\left(k'r - \frac{l\pi}{2}\right)} - e^{i\left(k'r - \frac{l\pi}{2}\right)}\right)\left(e^{i\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)} - e^{-i\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)}\right) =$$

$$= \frac{1}{4kk'}\int_0^\infty dr\left[e^{-i(k'-k)r} + e^{i(k'-k)}\right] - \frac{e^{-il\pi}}{4kk'}\left[e^{i(k+k')r} + \underbrace{e^{i2l\pi}}_{1,\ \text{bo } l\in\mathbb{Z}_+} e^{-i(k+k')r}\right]$$

$$\int_0^\infty e^{i(k'-k)r}dr = \int_0^{-\infty} e^{-i(k'-k)r}dr\,(-1) = \int_{-\infty}^0 e^{-i(k'-k)r}dr$$

$$= \frac{1}{4kk'}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dr\, e^{-i(k'-k)r}}_{2\pi\,\delta(k-k')} - \frac{e^{il\pi}}{4kk'}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(k+k')r}dr =$$

$$= \frac{\pi}{2kk'}\left[\delta(k-k') - e^{il\pi}\underbrace{\delta(k+k')}_{=0,\ \text{bo } k,k'>0}\right] = \frac{\pi}{2k^2}\delta(k-k')$$

$$N_{klm} = \frac{\pi}{2k^2}$$

Można też wykorzystać gęstość stanów tak jak na ćwiczeniach i wykładzie (przykład z 1D falą płaską w rezonatorze).