Zad. 2 (ćwiczenia 2)

sobota, 10 grudnia 2016 19:41

5. Korzystając z poprzedniego zadania wyznaczyć $< \boldsymbol{k}'|klm >$, gdzie $< \boldsymbol{r}|\boldsymbol{k}' >= \exp i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}$.

   Wsk.: Skorzystać z rozwinięcia fali płaskiej w fale sferyczne:

$$e^{ikr} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} i^l j_l(kr) Y_l^{m*}(\hat{k}) Y_l^{m*}(\hat{r}).$$

$$\langle \vec{k}' | klm \rangle = \langle \vec{k}' | \underbrace{\int d^3r \, |\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|}_{\text{rozkład jedynki w rep. położeniowej}} klm \rangle =$$

$$= \int_0^\infty dr \, r^2 \int_0^{4\pi} d\Omega \; 4\pi \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} i^{l'} j_{l'}(k'r) Y_{l'}^{m'*}(\hat{r}) \, k\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \, j_l(kr) Y_l^m(\hat{k}') =$$

$$= 4\pi \sqrt{\frac{2k^2}{\pi}} \int_0^\infty dr \, r^2 \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} i^{l'} j_{l'}(k'r) j_l(kr) \, \delta_{ll'} \delta_{mm'} \, Y_{l'}^{m'*}(\hat{k}') =$$

↑ korzystamy z unormowania harmonik sferycznych

$$= 4\pi \sqrt{\frac{2k^2}{\pi}} \int_0^\infty dr \, r^2 \, i^l j_l(k'r) j_l(kr) Y_l^{m*}(\hat{k}') =$$

↑ wykorzystujemy δ-Kroneckera wybierając odpowiednie elementy z sumy

$$= 4\pi \sqrt{\frac{2k^2}{\pi}} \, i^l \, Y_l^{m*}(\hat{k}') \frac{\pi}{2k^2} \, \delta(k-k') =$$

↑ korzystając z tego, że $\int_0^\infty dr \, r^2 j_l(kr) j_l(k'r) = \frac{\pi}{2k^2} \delta(k-k')$

$$= \frac{\sqrt{8\pi^3} \, i^l}{k^2} Y_l^{m*}(\hat{k}) \, \delta(k-k')$$