Zad. 3 (ćwiczenia 2)

sobota, 10 grudnia 2016 20:01

6. Pokazać, że każda macierz zespolona 2×2 może być przedstawiona w postaci $A = a_0\sigma_0 + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, gdzie σ oznaczają macierze Pauliego. Znaleźć związek między współrzędnymi $a_0, \boldsymbol{a}$ i współczynnikami macierzy A.

Pokażemy, że $\{\sigma_i\}_{i \in \{0,\dots,3\}}$ tworzą bazę przestrzeni macierzy hermitowskich 2×2:

Algebraicznie równoważnie można rozważyć:

$$\sigma_i = \begin{bmatrix} \delta_{i0}+\delta_{i3}, & \delta_{i1} - i\delta_{i2} \\ \delta_{i1}+i\delta_{i2}, & \delta_{i0}-\delta_{i3} \end{bmatrix} \longrightarrow \tilde{\sigma}_i = \begin{bmatrix} \delta_{i0}+\delta_{i3} \\ \delta_{i1} - i\delta_{i2} \\ \delta_{i1}+i\delta_{i2} \\ \delta_{i0}-\delta_{i3} \end{bmatrix}$$

$$(\tilde{\sigma}_i, \tilde{\sigma}_j) = 2\delta_{i0}\delta_{j0} + 2\delta_{i1}\delta_{j1} - 2\delta_{j2}\delta_{i2} + 2\delta_{i3}\delta_{j3} = 0 \quad \text{dla } i \neq j$$

czyli wektory $\{\tilde{\sigma}_i\}_{i\in\{0,\dots,3\}}$ są ortogonalne.

Ponadto

$$a_0\sigma_0 + \vec{a}\cdot\vec{\sigma} = 0 \Rightarrow a_i = 0 \quad \forall_i$$

liniowa niezależność

czyli $\{\sigma_i\}_{i\in\{0,1,2,3\}}$ jest bazą.

Ponadto

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_0\sigma_0 + \vec{a}\cdot\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} a_0+a_3, & a_1 - ia_2 \\ a_1+ia_2, & a_0-a_3 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\, A \quad , \quad a_i = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left[A \sigma_i\right] \quad \text{dla} \quad i \in \{1, 2, 3\}$$