Zad. 4 (ćwiczenia 2)

sobota, 10 grudnia 2016 23:42

7. Stosując przybliżenie wirującej fali wyznaczyć ewolucję układu dwupoziomowego o hamiltonianie

$$H_0 = \sum_{i=1,2} E_i \, |\phi_i >< \phi_i|$$

pod wpływem zaburzenia harmonicznego:

$$H'(t) = -\hat{\mu}\mathcal{E} \cos \omega t$$

gdzie operator momentu dipolowego: $\hat{\mu} = \mu|\phi_1 >< \phi_2| + \mu^*|\phi_2 >< \phi_1|$, $\mathcal{E}$ natężenie pola elektrycznego. Podać wartość oczekiwaną polaryzacji w zależności od czasu:

$$P(t) = < \psi(t)|\hat{\mu}|\psi(t) >,$$

zakładając, że w chwili początkowej układ był w stanie $|\phi_2 >$.

Przyjmujemy, że $E_1 = +\Delta$, $E_2 = -\Delta$ oraz $\Delta > 0$.

Ponadto $\mu_{12} = \mu_{21} = \mu > 0$

w bazie $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ mamy: $|\psi(t)\rangle = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle$

wartość oczekiwana:

$$P(t) = \langle \psi(t)| \hat{\mu} |\psi(t)\rangle = c_1^* c_2 \, \mu_{12} + c_1 c_2^* \mu_{21} = 2\mu \, \mathrm{Re}[c_1^* c_2]$$

Przechodzimy do układu wirującego, tj.

$$c_1(t) = e^{-i\omega t/2} c_1'(t \qquad , \qquad c_2(t) = e^{i\omega t/2} c_2'(t)$$

$$i\hbar \langle 1|\dot{\psi}\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} e^{-i\omega t/2} c_1'(t) + i\hbar e^{-i\omega t/2} \dot{c}_1'(t)$$

$$i\hbar \langle 2|\dot{\psi}\rangle = -\frac{\hbar\omega}{2} e^{i\omega t/2} c_2'(t) + i\hbar e^{i\omega t/2} \dot{c}_2'(t)$$

$$\langle 1|H|\psi\rangle = \Delta c_1'(t) e^{-i\omega t/2} - \frac{\mu\mathcal{E}}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) c_2'(t) e^{i\omega t/2}$$

$$\langle 2|H|\Psi\rangle = -\Delta\, c_2'(t)\, e^{i\omega t/2} - \frac{\mu\mathcal{E}}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) c_1'(t)\, e^{-i\omega t/2}$$

zatem

$$i\hbar \langle 1|\dot\Psi\rangle = \langle 1|H|\Psi\rangle$$

$$\frac{\hbar\omega}{2} e^{-i\omega t/2} c_1'(t) + i\hbar e^{-i\omega t/2} \dot c_1'(t) = \Delta c_1'(t) e^{-i\omega t/2} - \frac{\mu\mathcal{E}}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) c_2'(t) e^{i\omega t/2}$$

$$i\hbar\, \dot c_1'(t) = \left(\Delta - \frac{\hbar\omega}{2}\right) c_1'(t) - \frac{\mu\mathcal{E}}{2}\left[\cancel{e^{i2\omega t}} + 1\right] c_2'(t)$$

szybko rotujący człon poza rezonansem.. można go pominąć

Jest to tzw. przybliżenie rotującej fali (RWA) $\Longrightarrow$

Wprowadza się ponadto oznaczenia:

$$D = \frac{2\Delta}{\hbar} \quad - \text{odstrojenie}$$

$$\Omega = \frac{\mu\mathcal{E}}{\hbar} \quad - \text{częstość Rabiego}$$

wtedy:

$$i\hbar\, \partial_t \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} D & -\Omega \\ -\Omega & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2}\, \vec{h}\cdot\vec{\sigma},$$

$$U(\vec{h}\cdot\vec{\sigma}) = \exp\left(-i\,\frac{\vec{h}\cdot\vec{\sigma}}{2}t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{i\,\vec{h}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right)^n \underset{(\vec{h}\cdot\vec{\sigma})^2 = \mathbb{1}}{=}$$

$$= \mathbb{1} - \frac{\vec{h}\cdot\vec{\sigma}}{2|\vec{h}|}t + \frac{1}{2!}\left(-\frac{i|\vec{h}|}{2}\right)^2 \mathbb{1} + \frac{1}{3!}\left(-\frac{i|\vec{h}|}{2}\right)^3 \frac{\vec{h}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{h}|} + \ldots =$$

$$= \cos\left(\frac{|\vec{h}|}{2}t\right)\mathbb{1} - i\sin\left(\frac{|\vec{h}|t}{2}\right)\frac{\vec{h}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{h}|}$$

$$|\psi'(t)\rangle = e^{-iH't/\hbar}\,|\psi'(0)\rangle = e^{-i\frac{\vec{h}\cdot\vec{\sigma}}{2}t}\,|\psi'(0)\rangle =$$

w stanie początkowym układ znajduje się w stanie $|2\rangle$

$$= e^{-i\frac{\vec{h}\cdot\vec{\sigma}}{2}t}\,|2\rangle = \left[\cos\left(\frac{\omega_0}{2}t\right) + \frac{i\,\vec{h}\cdot\vec{\sigma}}{\omega_0}\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)\right]|2\rangle$$

zatem:

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\frac{\Omega}{\omega_0}\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) + i\frac{D}{\omega_0}\cos(\omega_0 t)\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$c_1'^{*}c_2' = \frac{\Omega}{\omega_0}\left[\frac{D}{\omega_0}\sin^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) - i\sin(\omega_0 t)\cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)\right]$$

więc

$$P(t) = 2\mu\,\mathrm{Re}\left(c_1^{*}c_2\,e^{i\omega t}\right) = \frac{\mu\Omega}{\omega_0}\left[1 - \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)\cos(\omega t) + \sin(\omega_0 t)\sin(\omega t)\right]$$

powrót do układu nie wirującego