Zad. 1 (ćwiczenia 3)

niedziela, 11 grudnia 2016 00:46

1. Macierz gęstości dla układu dwupoziomowego może być przedstawiona w postaci :
$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}[\sigma_0 + \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\sigma}],$$
gdzie $\boldsymbol{P}$ - trójwymiarowy wektor polaryzacji.

   a) Jakie własności musi mieć wektor $\boldsymbol{P}$, aby spełnione były warunki definicji macierzy gęstości ?

   b) Kiedy układ jest w stanie czystym, a kiedy w stanie mieszanym ?

   c) Podać równanie ruchu dla $\boldsymbol{P}$ jeśli hamiltonian układu ma postać:
$$\hat{H} = \frac{1}{2}(h_0\sigma_0 + \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{\sigma})$$
   Dla jakich $\boldsymbol{h}$ operator ten jest hermitowski ?

a) Niech $\vec{P} = [P_1, P_2, P_3]$, wtedy $\hat{\rho} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+P_3 & P_1 - iP_2 \\ P_1 + iP_2 & 1-P_3 \end{bmatrix}$

1° samosprzężoność operatora gęstości

$$\hat{\rho}^{\dagger} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (1+P_3)^* & (P_1+iP_2)^* \\ (P_1-iP_2)^* & (1+P_3)^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+P_3 , & P_1+iP_2 \\ P_1-iP_2 , & 1-P_3 \end{bmatrix}\frac{1}{2} = \hat{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}$$

2° $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = \frac{1}{2}(1+P_3) + \frac{1}{2}(1-P_3) = \underline{1}$

3° Dodatnio określoność

$$1+P_3 \geq 0 \quad \wedge \quad 1-P_3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |P_3| \leq \underline{1}$$

b) $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}^2 = \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} (1+P_3)^2 + (P_1-iP_2)(P_1+iP_2) & \text{coś} \\ \text{coś} & (1-P_3)^2 + (P_1-iP_2)(P_1+iP_2) \end{bmatrix} =$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2\right] = \frac{1}{2}\left[1 + |\vec{P}|^2\right]$$

Stan jest czysty gdy:

$$\frac{1}{2}\left[1+|\vec{p}|^2\right]=1 \Rightarrow |\vec{p}|^2=1$$

Dla stanu mieszanego:

$$\frac{1}{2}\left[1+|\vec{p}|^2\right]<1 \Rightarrow |\vec{p}|^2<1$$

c) $i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t}=[H,\rho]$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \vec{p}}{\partial t}\cdot\vec{\sigma} = -\frac{i}{\hbar}\left[\frac{\sigma_a}{2},\frac{\sigma_b}{2}\right]h_a p_b = \frac{1}{2\hbar}\epsilon_{abc}\sigma_c h_a p_b =$$

konwencja sumacyjna

$$= \frac{1}{2\hbar}\left(\vec{h}\times\vec{p}\right)\cdot\vec{\sigma}$$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \frac{1}{\hbar}\left(\vec{h}\times\vec{p}\right)$$

Wykorzystano: $[\sigma_a,\sigma_b]=2i\epsilon_{abc}\sigma_c$