# Zad. 2 (ćwiczenia 3)

niedziela, 11 grudnia 2016 01:06

2. Dany jest stan dwóch spinów:

$$\Psi >= \alpha|+> \otimes|+> +\beta|+> \otimes|-> +\gamma|-> \otimes|+> +\delta|-> \otimes|->,$$

gdzie $|\pm>$ oznacza stan o rzucie spinu na oś $z$ równym $\pm\hbar/2$, a $<\Psi|\Psi>= 1$. Podać macierze gęstości dla spinu 1 i spinu 2 obliczając odpowiedni ślad po stanach drugiego spinu. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że pomiar $S_{1y}$ da wartość $\hbar/2$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pomiar $S_{2z}$ da wynik $\hbar/2$ ?

Macierz gęstości:

$|++\rangle\langle++|$ $|++\rangle\langle+-|$ $|++\rangle\langle-+|$ $|++\rangle\langle--|$

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* & \alpha\gamma^* & \alpha\delta^* \\ \beta\alpha^* & |\beta|^2 & \beta\gamma^* & \beta\delta^* \\ \gamma\alpha^* & \gamma\beta^* & |\gamma|^2 & \gamma\delta^* \\ \delta\alpha^* & \delta\beta^* & \delta\gamma^* & |\delta|^2 \end{pmatrix}$$

$|--\rangle\langle++|$ $|-+\rangle\langle++|$ $|--\rangle\langle++|$ $|--\rangle\langle--|$

$$\hat{\rho}_1 = Tr_2\,\hat{\rho} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & \alpha\gamma^* + \beta\delta^* \\ \gamma\alpha^* + \delta\beta^* & |\gamma|^2 + |\delta|^2 \end{pmatrix}$$

macierze zredukowane

$$\hat{\rho}_2 = Tr_1\,\hat{\rho} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\gamma|^2 & \alpha\beta^* + \gamma\delta^* \\ \beta\alpha^* + \delta\gamma^* & |\beta|^2 + |\delta|^2 \end{pmatrix}$$

Pomiar spinu 1 cząstki wzdłuż osi y:

$$S_{1y} = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Szukamy wartości własnych:

$$\det(\sigma_y - \lambda \mathbb{1}) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

wektory własne: $|y+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + i|-\rangle\right)$

$$|y-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - i|-\rangle\right)$$

zatem

$$S_{1y} = \left(\frac{\hbar}{2}\right)\mathbb{P}_{y+} + \left(-\frac{\hbar}{2}\right)\mathbb{P}_{y-}$$ , gdzie

$$\mathbb{P}_{y\pm} = |y\pm\rangle\langle y\pm|$$ , zatem

$$\mathbb{P}_{y+} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

Prawdopodobieństwo uzyskania $\frac{\hbar}{2}$ w wyniku pomiaru $S_{1y}$ wynosi:

$$p\left(S_{1y} = \frac{\hbar}{2}\right) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}_1 \mathbb{P}_{y+}\right\} = \frac{1}{2}\left[|\alpha - i\gamma|^2 + |\beta - i\delta|^2\right]$$

Pomiar $S_{2z}$ na tym stanie daje

$$S_{2z} = \frac{\hbar}{2}|+\rangle\langle+| - \frac{\hbar}{2}|-\rangle\langle-|$$

$$p\left(S_{2z} = \frac{\hbar}{2}\right) = |\alpha|^2 + |\gamma|^2$$