Zad. 1 (ćwiczenia 4)

niedziela, 11 grudnia 2016 14:17

4. Operator gęstości dla układu dwóch spinów ma postać:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{8} I_{4\times4} + \frac{1}{2} \Psi^- >< \Psi^-|,$$

gdzie $|\Psi^- >= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+>_A \otimes |->_B - |->_A \otimes |+>_B)$. Załóżmy, że mierzymy jednocześnie spin A w kierunku osi $\hat{m}$ i spin B wzdłuż osi $\hat{n}$ takiej, że $\hat{n} \cdot \hat{m} = \cos\theta$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w obu przypadkach spin będzie skierowany w dodatnią stronę tych osi?

Konstruujemy operator rzutowy odpowiadający tej sytuacji:

$$\mathbb{P} = |m+\rangle_A\langle m+| \otimes |n+\rangle_B\langle n+| ,$$

gdzie $|m\pm\rangle\langle m\pm| = \frac{1}{2}(\sigma_0 \pm \vec{m}\cdot\vec{\sigma})$

wektor jednostkowy

$$p = \mathrm{Tr}\{\rho \mathbb{P}\} = \mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{8} \mathbb{1}_{4\times4}\mathbb{P} + \frac{1}{2}|\psi^-\rangle\langle\psi^-|\,\mathbb{P}\right\} =$$

$$= \frac{1}{8}\mathrm{Tr}\left(\mathbb{1}_{4\times4}\mathbb{P}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(|\psi^-\rangle\langle\psi^-|\,\mathbb{P}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\mathrm{Tr}\left(\mathbb{1}_{4\times4}\mathbb{P}\right) + \frac{1}{2}\langle\psi^-|\mathbb{P}|\psi^-\rangle$$

$$\frac{1}{8}\mathrm{Tr}\left(\mathbb{1}_{4\times4}\mathbb{P}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\langle\psi^-|\mathbb{P}|\psi^-\rangle = \frac{1}{4}\Big[\langle+-|\mathbb{P}|+-\rangle - \langle+-|\mathbb{P}|-+\rangle - \langle-+|\mathbb{P}|+-\rangle +$$

$$+ \langle-+|\mathbb{P}|-+\rangle\Big] =$$

$$= \frac{1}{16}\Big[(1+m_z)(1-n_z)-(m_x-im_y)(n_x+in_y)-(m_x+im_y)(n_x-in_y)$$

$$+(1-m_z)(1+n_z)\Big] =$$

$$= \frac{1}{8}\left[1-m_z n_z-m_x n_x-m_y n_y\right] = \frac{1}{8}\left[1-\vec{m}\cdot\vec{n}\right] = \frac{1}{8}\left[1-\cos\theta\right]$$

$$= \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

zatem

$$p(m_+ \wedge n_+) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$