Zad. 1 (ćwiczenia 5)

niedziela, 11 grudnia 2016 15:36

3. Macierz gęstości można przedstawić za pomocą funkcji Wignera zależnej od pędu i położenia:

$$f_W(p,x) = \int \rho(x + x'/2, x - x'/2) e^{-ipx'/\hbar} dx'$$

Obliczyć funkcję Wignera dla liniowego oscylatora harmonicznego w temperaturze T.Wykazać, że jest ona nieujemna.

Wprowadzamy oznaczenia:

$$\alpha = \frac{m\omega}{2\pi\hbar \sinh(2f)} \qquad \beta = \cosh(2f)$$

$$f_w(p,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\alpha} \exp\left[-\alpha\left(2x^2 - \frac{x'^2}{2}\right)\beta - 2x^2 + \frac{x'^2}{2}\right] \exp\left(-\frac{ipx'}{\hbar}\right) dx' =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\alpha} \exp\left[2x^2(\alpha - \alpha\beta) - \frac{x'^2}{2}(\alpha\beta + \alpha)\right] \exp\left(-\frac{ipx'}{\hbar}\right) dx' =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} A \exp\left(-\frac{a x'^2}{2} - \frac{ipx'}{\hbar}\right) dx' = A \exp\left(\frac{p^2}{2\hbar^2 \alpha(1+\beta)}\right) \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha(1+\beta)}} =$$

$A = \sqrt{\alpha} \exp\left(2x^2(\alpha - \alpha\beta)\right)$, $a = \alpha\beta + \alpha$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{1+\beta}} \exp\left(-2\alpha(\beta - 1)x^2 - \frac{p^2}{2\hbar\alpha(\beta-1)}\right)$$

$\exp(\ldots) > 0$ oraz $\frac{2\pi}{1+\beta} > 0$, czyli $f_w > 0$.