Zad. 2 (ćwiczenia 6)

poniedziałek, 12 grudnia 2016 09:33

2. Macierz transformacji spinu odpowiadająca złożeniu obrotów o kąty Eulera α, β, γ kolejno wokół osi z,y,z może być zapisana jako:

$$D^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-\frac{i}{2}\alpha\hat{\sigma}_z} e^{-\frac{i}{2}\beta\hat{\sigma}_y} e^{-\frac{i}{2}\gamma\hat{\sigma}_z},$$

gdzie $\hat{\sigma}_{x,y,z}$ - macierze Pauliego. Znaleźć oś $\vec{n}$ i kąt ϕ obrotu równoważnego tej transformacji.

Korzystamy z tożsamości:

$$\exp(i\theta\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) = \cos\theta\, \mathbb{1} + i\sin\theta\, \vec{n}\cdot\vec{\sigma}$$

wektor jednostkowy

$$\exp\left(-\frac{i\sigma_z\alpha}{2}\right)\exp\left(-\frac{i\sigma_y\beta}{2}\right)\exp\left(-\frac{i\sigma_z\gamma}{2}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma/2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2), & e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin(\beta/2) \\ e^{+i(\alpha+\gamma)/2}\sin(\beta/2), & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\phi/2) - in_z\sin(\phi/2), & (-in_x - n_y)\sin(\phi/2) \\ (-in_x + n_y)\sin(\phi/2), & \cos(\phi/2) + in_z\sin(\phi/2) \end{pmatrix}$$

w ogólnym przypadku obrotu o ϕ wzdłuż $\vec{n}$

Korzystając z niezmienniczości śladu otrzymujemy:

$$2\cos(\phi/2) = 2\cos(\beta/2)\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right), \text{ czyli}$$

$$\phi = 2\arccos\left[\cos(\beta/2)\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\right]$$

Rozwiązując układ równań otrzymany przez przyrównanie odpowiednich elementów macierzowych dostajemy:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\beta/2)\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}}\begin{pmatrix} -\sin(\beta/2)\sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right) \\ \sin(\beta/2)\cos\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right) \\ \cos(\beta/2)\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \end{pmatrix}$$