Zad. 3 (ćwiczenia 6)

poniedziałek, 12 grudnia 2016 14:44

3. Pokazać, że macierz postaci

$$A = \frac{\alpha\hat{\sigma}_0 + i\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{a}}{\alpha\hat{\sigma}_0 - i\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{a}},$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej a_0 i wektora rzeczywistego $\vec{a}$ reprezentuje pewien obrót. Znaleźć kąt i oś tego obrotu w zależności od a_0 i $\vec{a}$.

$$A = B(B^+)^{-1}, \quad \text{gdzie} \quad B = \alpha\sigma_0 + i\vec{\sigma}\cdot\vec{a}$$

$$BB^+ = \alpha^2 + (\vec{a}\cdot\vec{\sigma})^2 = \alpha^2 + \vec{a}^2 = \lambda$$

$$A = B\underset{\mathbb{1}}{\uparrow}(B^+)^{-1} = BBB^{-1}(B^+)^{-1} = B^2(BB^+)^{-1} = B^2\frac{1}{\lambda}$$

$$A = \frac{1}{\lambda}B^2 = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} \alpha - \vec{a}^2 + 2i\alpha a_3, & 2\alpha a_2 + 2i\alpha a_1 \\ -2\alpha a_2 + 2i\alpha a_3, & \alpha - \vec{a}^2 - 2i\alpha a_3 \end{pmatrix}$$

Korzystamy z własności macierzy z grupy SU(2) i wyznaczamy parametry Cayleya-Kleina:

$$\cos(\phi/2) = \mathrm{Re}[A_{11}] = \frac{\alpha - \vec{a}^2}{\lambda} \Rightarrow \sin(\phi/2) = \frac{2\alpha|\vec{a}|}{\lambda}$$

$$n_x = -\mathrm{Im}(A_{12})/\sin(\phi/2) = -a_1/|\vec{a}|$$

$$n_y = -\,\mathrm{Re}(A_{12})/\sin(\phi/2) = -\,a_2/|\vec{a}|$$

$$n_z = -\,\mathrm{Im}(A_{11})/\sin(\phi/2) = -\,a_3/|\vec{a}|$$

$$\vec{n} = -\,\frac{1}{|\vec{a}|}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \phi = 2\arccos\left(\frac{\alpha - \vec{a}^{\,2}}{\lambda}\right)$$