Zad. 2 (ćwiczenia 7)

poniedziałek, 12 grudnia 2016 22:28

2. Macierz reprezentacji nieredukowalnej D odpowiadająca obrotowi $\vec{\phi}$ ma postać

$$D(\vec{\phi}) = \exp\left(-\frac{i}{h}\vec{\phi}\cdot\hat{\vec{J}}\right)$$

gdzie $\hat{J}_{1,2,3}$ - generatory reprezentacji. Wiedząc, że (wykład)

$$D(\vec{\phi})\hat{J}_k D^{-1}(\vec{\phi}) = \sum_{l=1}^{3} R_{lk}\hat{J}_l,$$

gdzie $R_{kl} = \vec{e}_k \cdot \vec{e}_l\,'$ - macierz obrotu wyrażona przez iloczyny skalarne (kosinusy kierunkowe) między wersorami obróconego układu współrzędnych $\vec{e}_l\,'$ i wersorami układu wyjściowego $\vec{e}_k$, pokazać, że

$$D(\vec{\phi})D(\vec{\psi})D^{-1}(\vec{\phi}) = D(\vec{\psi}'),$$

gdzie $\psi'_m = \sum_{k=1}^{3} R_{mk}\psi_k$, tzn. oś obrotu $\vec{\psi}'$ powstaje z osi obrotu $\vec{\psi}$ w wyniku obrotu $\vec{\phi}$.

$$D(\vec{\phi})D(\vec{\psi})D^{-1}(\vec{\phi}) = D(\vec{\phi})\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\psi}\cdot\hat{\vec{J}}\right)D^{-1}(\vec{\phi}) =$$

$$= D(\vec{\phi})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\psi}\cdot\hat{\vec{J}}\right)D^{-1}(\vec{\phi}) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Ae^{-B}A^{-1} = e^{-ABA^{-1}}, \text{ bo} \\ (ABA^{-1})^n = \underbrace{AB\underbrace{A^{-1}A}_{\mathbb{1}}BA^{-1}\ldots ABA^{-1}}_{n\text{-krotnie}} = AB^nA^{-1} \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}D(\vec{\phi})\vec{\psi}\cdot\hat{\vec{J}}D^{-1}(\vec{\phi})\right)^n = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}D(\vec{\phi})\vec{\psi}\cdot\hat{\vec{J}}D^{-1}(\vec{\phi})\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{l=1}^{3}R_{lk}\psi_k\right)J_l\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\sum_{l=1}^{3}\psi'_l J_l\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\psi}'\cdot\hat{\vec{J}}\right) = D(\vec{\psi}')$$