Zad. 3 (ćwiczenia 7)

poniedziałek, 12 grudnia 2016 22:40

3. Pokazać, że dla reprezentacji $l = 1$ grupy obrotów macierz obrotu o kąt β wokół osi OY ma postać:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y^{(1)}} = 1 - i\frac{J_y^{(1)}}{\hbar}\sin\beta - \left(\frac{J_y^{(1)}}{\hbar}\right)^2 (1-\cos\beta).$$

Przedstawić tę macierz w bazie wektorów własnych macierzy $J_z^{(1)}$ i $\left(\vec{J}^{(1)}\right)^2$.

$$J_y = \frac{J_+ - J_-}{2i}$$

$$J_+|j,m\rangle = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\,|j,m+1\rangle$$

$$J_-|j,m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,|j,m-1\rangle$$

przy czym $j=1$, $m \in \{-1,0,1\}$, więc

$$J_+|1,-1\rangle = \sqrt{2}\hbar|1,0\rangle$$

$$J_+|1,0\rangle = \sqrt{2}\hbar|1,1\rangle$$

$$J_-|1,0\rangle = \sqrt{2}\hbar|1,-1\rangle$$

$$J_-|1,1\rangle = \sqrt{2}\hbar|1,0\rangle,$$

zatem

$$J_y^{(1)} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/i & 0 \\ -\sqrt{2}/i & 0 & \sqrt{2}/i \\ 0 & -\sqrt{2}/i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}i}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{M}\begin{array}{l} m=1 \\ m=0 \\ m=-1 \end{array}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -2M \,, \quad \text{czyli } \left(J_y^{(1)}\right)^3 = \hbar^2 J_y^{(1)}$$

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\beta J_y^{(1)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-i\beta}{\hbar}\right)^n \frac{\left(J_y^{(1)}\right)^n}{n!} =$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-i\beta}{\hbar}\right)^{2k+1} \frac{J_y^{(1)\,2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{i\beta}{\hbar}\right)^{2k} \frac{J_y^{(1)\,2k}}{(2k)!} =$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_y^{(1)}}{\hbar} \frac{(-i\beta)^{2k+1}}{(2k+1)!} - \frac{J_y^{(1)\,2}}{\hbar^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\beta)^{2k}}{(2k)!} =$$

$$= 1 - i\sin\beta \,\frac{J_y^{(1)}}{\hbar} - \left(\frac{J_y^{(1)}}{\hbar}\right)^2 (1-\cos\beta)$$

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\beta J_y^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\cos\beta) \,, & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta \,, & \frac{1}{2}(1-\cos\beta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta \,, & \cos\beta \,, & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta \\ -\frac{1}{2}(1-\cos\beta) \,, & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta \,, & \frac{1}{2}(1+\cos\beta) \end{pmatrix}$$