Zad. 1 (ćwiczenia 8)

poniedziałek, 12 grudnia 2016 23:14

4. Spinor opisujący elektron o spinie 1/2 w polu siły centralnej ma ogólną postać: (uzasadnić)

$$\psi_{j=l\pm 1/2, j_z}(\vec{r}) = F_l(r) \begin{pmatrix} \left(l\,\frac{1}{2}; (j_z - \frac{1}{2})\,\frac{1}{2} \,\middle|\, l\,\frac{1}{2}; j\,j_z\right) Y_{l,j_z-1/2}(\hat{r}) \\ \left(l\,\frac{1}{2}; (j_z + \frac{1}{2})\,-\frac{1}{2} \,\middle|\, l\,\frac{1}{2}; j\,j_z\right) Y_{l,j_z+1/2}(\hat{r}) \end{pmatrix},$$

Tutaj F_l funkcja radialna, $Y_{l,m}(\hat{r})$ - harmoniki sferyczne, $(l_1 l_2; m_1 m_2 | l_1 l_2; j j_z)$ - współczynniki Clebscha-Gordana. Wyznaczyć współczynniki C-B dla $l_1 = l$ i $l_2 = 1/2$. tzn. współczynniki: $(l\,\frac{1}{2}; (j_z \mp \frac{1}{2})\,\pm\frac{1}{2} \,|\, l\,\frac{1}{2}; j\,j_z)$.

Funkcje falowe muszą być funkcjami własnymi operatorów:

$$\vec{J}^{\,2} = (\vec{L} + \vec{S})^2 \quad \text{oraz} \quad J_z = S_z + L_z,$$

przy czym

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Możemy zapisać J_z w postaci macierzowej

$$J_z = L_z \cdot \mathbb{1} + \frac{\hbar}{2}\sigma_z = \hbar \begin{pmatrix} -i\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -i\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ponadto chcemy by:

$$J_z \psi = \hbar m_j \psi \qquad (*)$$

Postulujemy ψ w postaci

$$\psi = \begin{pmatrix} C_1 e^{i m_\alpha \varphi} \\ C_2 e^{i m_\beta \varphi} \end{pmatrix}$$

$$J_z\psi = \hbar\left(-i\left(i m_\alpha\right)+\frac{1}{2}\right) C_1 e^{i m_\alpha \varphi}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} +$$

$$+\hbar\left(-i\left(i m_\beta\right)-\frac{1}{2}\right) C_2 e^{i m_z \varphi}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Całość ma się zbiegać do (*) zatem

$$m_\alpha = m_j - \frac{1}{2}, \quad m_\beta = m_j + \frac{1}{2}$$

Spinor o zapostulowanej postaci musi być stanem własnym operatora $\vec{J}^2$, który można zapisać w postaci macierzowej:

$$\vec{J}^2 = \vec{L}^2 + \vec{S}^2 + 2\vec{L}\cdot\vec{S} = \vec{L} + \frac{3}{4}\hbar^2 + \hbar\begin{pmatrix} L_z & L_- \\ L_+ & L_z \end{pmatrix}$$

$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ oraz $\vec{S}^2\psi = \hbar^2 s(s+1)\psi$

Mamy zatem do rozwiązania zagadnienie

$$\vec{J}^2\psi = \begin{pmatrix} \vec{L}^2 + \frac{3}{4}\hbar^2 + \hbar L_z, & \hbar L_- \\ \hbar L_+, & \vec{L}^2 + \frac{3}{4}\hbar^2 - \hbar L_z \end{pmatrix}\psi = \hbar^2 j(j+1)\psi$$

Postać współczynników c_1 i c_2 w spinorze ψ można zapostulować poprzez analogię do problemu wodoropodobnego, zatem

$$\psi = \begin{pmatrix} f(r)\, Y_{l, m_j - \frac{1}{2}}(\hat{r}) \\ g(r)\, Y_{l, m_j + \frac{1}{2}}(\hat{r}) \end{pmatrix}$$

$$Y_{lm}(\hat{r}) = N_{lm} P_{lm}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}, \quad \text{gdzie}$$

$$N_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{2\pi}\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$$

Ponadto wiemy, że

$$L_+ Y_{lm} = -\hbar\sqrt{(l+m+1)(l-m)}\; Y_{l,m+1}$$

$$L_- Y_{lm} = -\hbar\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\; Y_{l,m-1}$$

$$L_z Y_{lm} = \hbar m\, Y_{lm}$$

$$\vec{L}^2 Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1)\, Y_{lm}$$

Zatem rozwiązując zagadnienie $\vec{J}^2\psi = \hbar^2 j(j+1)\psi$ otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} f\left[l(l+1) + \frac{3}{4} + \left(m_j - \frac{1}{2}\right) - j(j+1)\right] - g\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 - m_j^2} = 0 \\ -f\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 - m_j^2} + g\left[l(l+1) + \frac{3}{4} - \left(m_j + \frac{1}{2}\right) - j(j+1)\right] = 0 \end{cases}$$

Aby układ miał nietrywialne rozwiązanie: $g(r) = B\,F(r)$ i $f(r) = A\,F(r)$

Istnienie rozwiązań wymaga znikania wyznacznika

$$\left[j(j+1) - \left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right]^2 - \cancel{m_j^2} - \left[\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 - \cancel{m_j^2}\right] = 0$$

<u>Rozw. 1:</u> $j = l + \frac{1}{2}$, wtedy $B = -A\sqrt{\dfrac{l+\frac{1}{2}-m_j}{l+\frac{1}{2}+m_j}}$

$$\psi_1 = \frac{F_l(r)}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \sqrt{l+\frac{1}{2}+m_j}\; Y_{l,m_j-\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{l+\frac{1}{2}-m_j}\; Y_{l,m_j+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Rozw. 2: $\quad j = l - \frac{1}{2}$; wtedy $B = A\sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+m_j}{l+\frac{1}{2}-m_j}}$

$$\psi_2 = \frac{F_l(r)}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \sqrt{l+\frac{1}{2}-m_j}\; Y_{l,m_j-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{l+\frac{1}{2}+m_j}\; Y_{l,m_j+\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

gdzie $\quad \chi_l = F_l(r)\cdot r$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\chi_l'' - \frac{l(l+1)}{r^2}\chi_l\right) + V(r)\chi_l = E_l\chi_l$$

Ogólnie

$$\boxed{\psi_{j=l\pm\frac{1}{2},\, j_z} = \frac{F_l(r)}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \sqrt{l+\frac{1}{2}\pm m_j}\; Y_{l,m_j-\frac{1}{2}} \\ \mp\sqrt{l+\frac{1}{2}\mp m_j}\; Y_{l,m_j+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}}$$

stąd można odczytać postać współczynników Clebscha–Gordana.