Zad. 2 (ćwiczenia 9)

środa, 25 stycznia 2017 16:14

2. Korzystając z relacji komutacji operatorów a_i oraz $a_i^\dagger$ wykazać, że wartości własne operatora liczby obsadzeń $N_i = a_i^\dagger a_i$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi w przypadku bozonów, a w przypadku fermionów przyjmują wartości 1 lub 0.

Dla bozonów:

$$[a_i, a_j^+] = \delta_{ij} = a_i a_j^+ - a_j^+ a_i$$

$$N_i (a_i^+ |n\rangle) = a_i^+ a_i a_i^+ |n\rangle = a_i^+ (1 + a_i^+ a_i)|n\rangle =$$

$$= a_i^+ (n+1)|n\rangle = (n+1) a_i^+ |n\rangle$$

czyli operator a_i^+ zwiększa liczbę cząstek o 1

$$N_i (a_i |n\rangle) = a_i^+ a_i a_i |n\rangle = a_i (a_i^+ a_i - 1)|n\rangle =$$

$$= a_i (n-1)|n\rangle = (n-1) a_i |n\rangle,$$

czyli operator a_i zmniejsza liczbę cząstek o 1

$\langle n| a_i^+ a_i |n\rangle = n \geq 0$, co po połączeniu z powyższymi wnioskami daje, że $n \in \mathbb{Z}_+$

Dla fermionów:

$$\{a_i, a_j^+\} = \delta_{ij} = a_i a_j^+ + a_j^+ a_i$$

$$N_i^2 = a_i^+ a_i a_i^+ a_i = a_i^+ a_i (1 - a_i a_i^+) =$$

$$= N_i - a_i^+ a_i a_i a_i^+ = N_i + a_i^+ a_i a_i a_i^+ = N_i$$

$$N_i^2 = N_i \Rightarrow \quad N_i \in \{0, 1\}$$