Mechanika Kwantowa IIB
Ćwiczenia 1, tydz. 3.10.2016

Na wykładzie omówiono postulaty mechaniki kwantowej, interpretację probabilistyczną, relację zupełności, ewolucję czasową.

1. Komutator jako operator różniczkowy:

   a) Pokazać, że dla każdego operatora X oraz iloczynu operatorów A i B spełniona jest "reguła Leibniza":

   $$[X, AB] = [X, A]B + A[X, B]$$

   b) Wykazać, że jeśli $[x, p] = i\hbar$, to:

   $$[x, p^n] = i\hbar n p^{n-1},\ [p, x^n] = -i\hbar n x^{n-1}.$$

   c) Jeśli $f(p)$ i $g(p)$ analityczne funkcje operatorów x i p, to $[x, f(p)] = i\hbar f'(p)]$ i $[p, g(x)] = -i\hbar g'(x)]$. Ogólnie, jeśli $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$, to

   $$[A, f(B)] = [A, B]\ f'[B].$$

2. Rozpatrujemy układ dwóch spinów połówkowych A i B w stanie singletowym.

   1) Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania w wyniku pomiaru na spinie A wielkości $S_{Az} = \hbar/2$, jeśli nie wykonano pomiaru na spinie B?

   2)Pomiar spinu B wykazał wartość $S_{Bz} = \hbar/2$.

   Jaki będzie wtedy wynik pomiaru S_{Az} na spinie A?

   Jaki będzie wynik jeśli zmierzymy S_{Ax} na spinie A?

3. Rozważyć układ fizyczny, który opisany jest przez wektory w 3-wymiarowej przestrzeni rozpiętej przez bazę złożoną z wektorów $|u_1>, |u_2>$ i $|u_3>$. W bazie tej macierz hamiltonianu $\hat{\mathbf{H}}$ oraz obserwabli $\hat{\mathbf{B}}$ mają postać:

   $$\mathbf{H} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

   gdzie ω_0 i b - stałe rzeczywiste. W chwili początkowej układ był w stanie:

   $$|\psi(0)> = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1> + \frac{1}{2}|u_2> \frac{1}{2}|u_3>$$

   a) Wyznaczyć stan $|\psi(t)>$ w chwili t

   b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w chwili t układ ma energię $2\hbar\omega_0$?

   c) Podać możliwe wartości pomiaru wielkości reprezentowanej przez macierz $\mathbf{B}$ oraz ich prawdopodobieństwa w zależności od czasu.

4. Sferycznie symetryczne rozwiązanie swobodnego równania Schrödingera;

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\Psi(\boldsymbol{r}) = E\Psi(\boldsymbol{r})$$

ma postać:

$$\Psi(\boldsymbol{r}) =< \boldsymbol{r}|klm >= j_l(kr)Y_l^m(\phi,\theta),$$

gdzie r,ϕ,θ - współrzędne sferyczne $\boldsymbol{r}$, Y_l^m - harmoniki sferyczne unormowane do delty Kroneckera:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \; Y_l^m(\phi,\theta)Y_{l'}^{m'}(\phi,\theta) = \delta_{mm'}\delta_{ll'},$$

a $\hbar k = \sqrt{2mE}$ - pęd radialny. Sferyczne funkcje Bessel'a $j_l(z)$ mają następujące rozwinięcie asymptotyczne gdy $z \to \infty$:

$$j_l(z) \sim \frac{1}{z}\sin(z - l\pi/2).$$

Pokazać, że

$$< k'l'm'|klm >= N_{klm}\delta(k-k')\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

i wyznaczyć N_{klm}.

5. Korzystając z poprzedniego zadania wyznaczyć $< \boldsymbol{k}'|klm >$, gdzie $< \boldsymbol{r}|\boldsymbol{k}' >= \exp i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}$.

   Wsk.: Skorzystać z rozwinięcia fali płaskiej w fale sferyczne:

$$e^{i\boldsymbol{kr}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} i^l j_l(kr) Y_l^{m*}(\hat{k})Y_l^{m*}(\hat{r}).$$

6. Pokazać, że każda macierz zespolona 2×2 może być przedstawiona w postaci $A = a_0\sigma_0 + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}$, gdzie σ oznaczają macierze Pauliego. Znaleźć związek między współrzędnymi $a_0, \boldsymbol{a}$ i współczynnikami macierzy A.

7. Stosując przybliżenie wirującej fali wyznaczyć ewolucję układu dwupoziomowego o hamiltonianie

$$H_0 = \sum_{i=1,2} E_i\,|\phi_i >< \phi_i|$$

pod wpływem zaburzenia harmonicznego:

$$H'(t) = -\hat{\mu}\mathcal{E}\cos\omega t$$

gdzie operator momentu dipolowego: $\hat{\mu} = \mu|\phi_1 >< \phi_2| + \mu^*|\phi_2 >< \phi_1|$, $\mathcal{E}$ natężenie pola elektrycznego. Podać wartość oczekiwaną polaryzacji w zależności od czasu:

$$P(t) =< \psi(t)|\hat{\mu}|\psi(t) >,$$

zakładając, że w chwili początkowej układ był w stanie $|\phi_2 >$.