

Mechanika Kwantowa IIB

Ćwiczenia 2, tydz. 10.10.2016

Elementarne działania na macierzy gęstości.

1. Macierz gęstości dla układu dwupoziomowego może być przedstawiona w postaci :

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}[\sigma_0 + \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma}],$$

gdzie \mathbf{P} - trójwymiarowy wektor polaryzacji.

- a) Jakie własności musi mieć wektor \mathbf{P} , aby spełnione były warunki definicji macierzy gęstości ?
- b) Kiedy układ jest w stanie czystym, a kiedy w stanie mieszanym ?
- c) Podać równanie ruchu dla \mathbf{P} jeśli hamiltonian układu ma postać:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(h_0\sigma_0 + \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\sigma})$$

Dla jakich \mathbf{h} operator ten jest hermitowski ?

2. Dany jest stan dwóch spinów:

$$|\Psi\rangle = \alpha|+\rangle \otimes |+\rangle + \beta|+\rangle \otimes |-\rangle + \gamma|-\rangle \otimes |+\rangle + \delta|-\rangle \otimes |-\rangle,$$

gdzie $|\pm\rangle$ oznacza stan o rzucie spinu na oś z równym $\pm\hbar/2$, a $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$.

Podać macierze gęstości dla spinu 1 i spinu 2 obliczając odpowiedni ślad po stanach drugiego spinu. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że pomiar S_{1y} da wartość $\hbar/2$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pomiar S_{2z} da wynik $\hbar/2$?

3. W zadaniu poprzednim obliczyć prawdopodobieństwo tego, że dwa następujące po sobie pomiary S_{1y} i S_{2z} dadzą wynik $\hbar/2$ w obu przypadkach. Pokazać, że rozwiązanie można przedstawić jako $\text{Tr}[\hat{\rho}P_+]$, gdzie

$$P_+ = |Y+\rangle \otimes |+\rangle \langle Y+| \otimes \langle +|,$$

a $\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle\Psi|$. Stan o rzucie spinu na oś y równym $\hbar/2$ oznaczony jest przez $|Y+\rangle$.

4. Operator gęstości dla układu dwóch spinów ma postać:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{8}I_{4 \times 4} + \frac{1}{2}|\Psi^-\rangle \langle\Psi^-|,$$

gdzie $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_A \otimes |-\rangle_B - |-\rangle_A \otimes |+\rangle_B)$. Załóżmy, że mierzymy jednocześnie spin A w kierunku osi \hat{m} i spin B wzdłuż osi \hat{n} takiej, że $\hat{n} \cdot \hat{m} = \cos\theta$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w obu przypadkach spin będzie skierowany w dodatnią stronę tych osi?