Mechanika Kwantowa IIB
Ćwiczenia 3, tydz. 17.10.2016

Macierz gęstości układów fizycznych.
Splątanie.

1. Wyznaczyć macierz gęstości liniowego oscylatora harmonicznego w kontakcie z termostatem o temperaturze T. (Feynman, Statistical Mechanics, A Set of Lectures, rozd. 2)

   Wsk.: Przyjąć hamiltonian oscylatora:

   $$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2},$$

   i wykazać, że nieunormowana macierz gęstości $\rho_U(x, x', \beta) = e^{-\beta H}$ spełnia równania ($\beta = 1/k_B T$, k_B stała Boltzmanna):

   $$\begin{aligned} -\tfrac{\partial}{\partial\beta}\rho_U(x, x', \beta) &= \left(-\tfrac{\hbar^2}{2m}\tfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \tfrac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\rho_U(x, x', \beta) \\ &= \left(-\tfrac{\hbar^2}{2m}\tfrac{\partial^2}{\partial x'^2} + \tfrac{m\omega^2 x'^2}{2}\right)\rho_U(x, x', \beta), \end{aligned}$$

   z warunkiem początkowym $\rho_U(x, x', \beta = 0) = \delta(x - x')$. Rozwiązania tych równań szukać w postaci funkcji Gaussa:

   $$\rho_U(x, x', \beta) = \exp\left[-(A(\beta)x^2 + B(\beta)x + C(\beta))\right].$$

2. Korzystając z wyników poprzedniego zadania podać przybliżoną postać macierzy gęstości oscylatora harmonicznego gdy $\hbar\omega\beta \to 0$ (granica wysokich temperatur).

3. Macierz gęstości można przedstawić za pomocą funkcji Wignera zależnej od pędu i położenia:

   $$f_W(p, x) = \int \rho(x + x'/2, x - x'/2) e^{-ipx'\hbar} dx'$$

   Obliczyć funkcję Wignera dla liniowego oscylatora harmonicznego w temperaturze T.Wykazać, że jest ona nieujemna.

4. Czy stan dwóch spinów:

   $$\Psi = \frac{1}{\sqrt{3}}(|-\rangle_A \otimes |-\rangle_B + |-\rangle_A \otimes |+\rangle_B + |+\rangle_A \otimes |+\rangle_B)$$

   jest splątany? Wyznaczyć macierze $\hat{\rho}_{AB}$,$\hat{\rho}_A$ i $\hat{\rho}_B$. Obliczyć liczbę Schmidta i entropię splątania dla tego stanu.

5. Obliczyć wartość oczekiwaną

$$\langle\Psi^-|(\boldsymbol{\sigma}^{(A)}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{\sigma}^{(B)}\cdot\boldsymbol{m})|\Psi^-\rangle.$$

w stanie

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_A|-\rangle_B - |-\rangle_A|+\rangle_B)$$

przyjmując, że wektory jednostkowe $\boldsymbol{n}$ i $\boldsymbol{m}$ są zawarte w płaszczyźnie (xz), a kąt między nimi wynosi Θ.

Wskazówka: pokazać bezpośrednim rachunkiem, że

$$(\boldsymbol{\sigma}^{(A)}+\boldsymbol{\sigma}^{(B)})|\Psi^-\rangle = 0$$