Mechanika Kwantowa IIB
Ćwiczenia 5, tydz. 14.11.2016

Symetrie, reprezentacje grupy obrotów, spin

1. Niech $\{|\alpha, l, m>\}_{m=-l}^{l}$ oraz $\{|\beta, l, m>\}_{m=-l}^{l}$ stanowią dwie różne bazy reprezentacji $D^{(l)}(R)$ grupy obrotów o wymiarze $2l+1$, tzn.:

   $$U(R)|\alpha, l, m>= \sum_{m'=-l}^{l} D^{(l)}_{m'm}(R)|\alpha, l, m'> \ \text{ oraz } \ U(R)|\beta, l, m>= \sum_{m'=-l}^{l} D^{(l)}_{m'm}(R)|\beta, l, m'> .$$

   Pokazać, że $< \alpha, l, m|\beta, l, m'>= \lambda\delta_{mm'}$.

   Wsk.: Lemat Schura.

2. Macierz reprezentacji nieredukowalnej D odpowiadająca obrotowi $\vec{\phi}$ ma postać

   $$D(\vec{\phi}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\hat{\vec{J}}\right)$$

   gdzie $\hat{J}_{1,2,3}$ - generatory reprezentacji. Wiedząc, że (wykład)

   $$D(\vec{\phi})\hat{J}_k D^{-1}(\vec{\phi}) = \sum_{l=1}^{3} R_{lk}\hat{J}_l,$$

   gdzie $R_{kl} = \vec{e}_k \cdot \vec{e}_l\,'$ - macierz obrotu wyrażona przez iloczyny skalarne (kosinusy kierunkowe) między wersorami obróconego układu współrzędnych $\vec{e}_l\,'$ i wersorami układu wyjściowego $\vec{e}_k$, pokazać, że

   $$D(\vec{\phi})D(\vec{\psi})D^{-1}(\vec{\phi}) = D(\vec{\psi}'),$$

   gdzie $\psi'_m = \sum_{k=1}^{3} R_{mk}\psi_k$, tzn. oś obrotu $\vec{\psi}'$ powstaje z osi obrotu $\vec{\psi}$ w wyniku obrotu $\vec{\phi}$.

3. Pokazać, że dla reprezentacji $l=1$ grupy obrotów macierz obrotu o kąt β wokół osi OY ma postać:

   $$e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y^{(1)}} = 1 - i\frac{J_y^{(1)}}{\hbar}\sin\beta - \left(\frac{J_y^{(1)}}{\hbar}\right)^2 (1-\cos\beta).$$

   Przedstawić tę macierz w bazie wektorów własnych macierzy $J_z^{(1)}$ i $\left(\vec{J}^{(1)}\right)^2$.

4. Spinor opisujący elektron o spinie 1/2 w polu siły centralnej ma ogólną postać: (uzasadnić)

$$\psi_{j=l\pm1/2,j_z}(\vec{r}) = F_l(r)\begin{pmatrix} \left(l\ \frac{1}{2}; (j_z-\frac{1}{2})\ \frac{1}{2}\ \middle|\ l\ \frac{1}{2}; j\ j_z\right) Y_{l,j_z-1/2}(\hat{r}) \\ \\ \left(l\ \frac{1}{2}; (j_z+\frac{1}{2})\ -\frac{1}{2}\ \middle|\ l\ \frac{1}{2}; j\ j_z\right) Y_{l,j_z+1/2}(\hat{r}) \end{pmatrix},$$

Tutaj F_l funkcja radialna, $Y_{l,m}(\hat{r})$ - harmoniki sferyczne, $(l_1 l_2; m_1 m_2 | l_1 l_2; j j_z)$ - współczynniki Clebscha-Gordana. Wyznaczyć współczynniki C-B dla $l_1 = l$ i $l_2 = 1/2$. tzn. współczynniki: $\left(l\ \frac{1}{2}; (j_z \mp \frac{1}{2})\ \pm\frac{1}{2}\ \middle|\ l\ \frac{1}{2}; j\ j_z\right)$.

5. Korzystając z wyników poprzedniego zadania obliczyć wartość oczekiwaną spinu $\vec{s}$ elektronu w unormowanym do jedności stanie $\psi_{j=l\pm1/2,j_z}(\vec{r})$. Jeśli starczy czasu: wartość oczekiwaną orbitalnego momentu pędu $\vec{L}$.