Mechanika Kwantowa IIB
Ćwiczenia 6, tydz. 28.11.2016

Na wykładzie omówiono drugą kwantyzację

1. Przedyskutować stany własne i energie własne atomu helu. Pokazać, że ogólna postać energii układu dwóch elektronów może być sprowadzona do postaci $E = V - 2J(\frac{1}{4} + \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2)$, gdzie $\vec{s}_i$ dla $i = 1, 2$ operatory spinów tych elektronów.

2. Korzystając z relacji komutacji operatorów a_i oraz $a_i^\dagger$ wykazać, że wartości własne operatora liczby obsadzeń $N_i = a_i^\dagger a_i$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi w przypadku bozonów, a w przypadku fermionów przyjmują wartości 1 lub 0.

3. Niech $|\vec{k}, \sigma >$ oznacza jednocząstkowy stan fermionu odpowiadający fali płaskiej o wektorze falowym $\vec{k}$ i spinie σ : $\phi_{\vec{k},\sigma}(\vec{r}\sigma') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \delta_{\sigma\sigma'}$. Podać wynik działania operatora pola $\hat{\psi}_\sigma(\vec{r})$ na unormowany stan $N-$ cząstkowy:

$$\hat{\psi}_\sigma(\vec{r})|\vec{k}_1\sigma_1, \vec{k}_2\sigma_3, \vec{k}_4\sigma_4, \ldots, \vec{k}_N\sigma_N > .$$

4. Rozpatrujemy układ fermionowy o jednym orbitalu, który może być nieobsadzony (stan $|0 >$) lub obsadzony (stan $|1 >= a^\dagger|0 >$). Pokazać, że najbardziej ogólne przekształcenie kanoniczne operatorów a i $a^\dagger$: $a, a^\dagger \to a', a'^\dagger$ spełniające warunki $[a', a'^\dagger]_+ = 1$, $(a')^2 = 0$, $(a'^\dagger)^2 = 0$ jest równoważne obrotowi w przestrzeni spinowej.

   Wsk.: wprowadzić przyporządkowanie:

$$\sigma_x = a + a^\dagger, \quad \sigma_y = i(a - a^\dagger), \quad \sigma_z = 2a^\dagger a - 1,$$

   gdzie $\sigma_i \, , i = x, y, z$ macierze Pauliego.

5. Hamiltonian układu cząstek bez oddziaływania w polu potencjału zależnego od czasu:

$$\hat{H}(t) = \sum_\sigma \int d^3r \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\vec{r}) \left(-\frac{1}{2m} \triangle + V(\vec{r}, t) \right) \hat{\psi}_\sigma(\vec{r}),$$

   gdzie $\hat{\psi}$ i $\psi^\dagger$ - operatory pola. Pokazać, że komutator (dla bozonów) i antykomutator (dla fermionów) operatorów pola w obrazie Heisenberga:

$$K_{\sigma\sigma'}(\vec{r}, t, \vec{r}\,', t') = [\hat{\psi}_\sigma(\vec{r}, t), \hat{\psi}^\dagger_{\sigma'}(\vec{r}\,', t')]_\mp$$

   jest rozwiązaniem fundamentalnym jednocząstkowego równania Schrödingera:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} K_{\sigma\sigma'}(\vec{r}, t, \vec{r}\,', t') = \left(-\frac{1}{2m} \triangle + V(\vec{r}, t) \right) K_{\sigma\sigma'}(\vec{r}, t, \vec{r}\,', t')$$

z war. pocz. $K_{\sigma\sigma'}(\vec{r}, t, \vec{r}\,', t) = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$.

Wsk. w obrazie Heisenberga: $\hat{\psi}_\sigma(\vec{r}, t) = \hat{U}(0, t)\hat{\psi}_\sigma(\vec{r})\hat{U}(t, 0)$, gdzie $\hat{U}(t, t')$ operator ewolucji dla hamiltonianu $\hat{H}$:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t, t') = \hat{H}(t)\hat{U}(t, t'), \quad -i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\hat{U}(t, t') = \hat{U}(t, t')\hat{H}(t'), \quad U(t, t) = \mathbf{1}$$