Mechanika kwantowa II B

ćwiczenia #1

3 październik 2017

Zadanie 1

Rozważyć problem jednowymiarowego kwantowego oscylatora harmonicznego, którego hamiltonian dany jest poniżej

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2.$$

Znaleźć spektrum hamiltonianu oraz jego stany własne wykorzystując do tego operatory drabinkowe.

(a) Przepisać hamiltonian przy pomocy operatorów $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P})$ oraz $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P})$, gdzie $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\hat{X}$, a $\hat{p} = \sqrt{m\hbar\omega}\hat{P}$. Oliczyć komutator $[a, a^\dagger]$.

(b) Oblicz komutator $[\hat{H}, a]$ oraz $[\hat{H}, a^\dagger]$.

(c) Pokazać, że jeżeli $|\nu\rangle$ jest stanem własnym operatora $\hat{N} = a^\dagger a$ o wartości własnej ν wtedy spełnione są własności:

1)$\nu \geqslant 0$,

2) jeżeli $\nu = 0$ to $a|\nu\rangle = 0$, jeżeli nie to $a|\nu\rangle$ jest niezerowym wektorem o normie $\nu\langle\nu|\nu\rangle$, wtedy $\hat{N}a|\nu\rangle = (\nu - 1)a|\nu\rangle$,

3) jeżeli $a \dagger |\nu\rangle$ jest niezerowym wektorem o normie $(\nu + 1)\langle\nu|\nu\rangle$, wtedy $\hat{N}a^\dagger|\nu\rangle = (\nu + 1)a^\dagger|\nu\rangle$.

(d) zapisać dowolny unormowany stan własny hamiltonianu za przypomocy operatorów drabinkowych oraz podać spektrum hamiltonianu.