Mechanika kwantowa II B

ćwiczenia #3

17 października 2017

Zadanie 1

Pokazać, że

$$\frac{1}{N!}\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_N}|\alpha_1\ldots\alpha_N\}\{\alpha_1\ldots\alpha_N| = \mathbb{1}$$

w $\mathcal{B}_N, \mathcal{F}_N$.

Zadanie 2

Pokazać, że $\{\alpha_1'\ldots\alpha_N'|\alpha_1\ldots\alpha_N\} = \zeta^P\prod_\alpha(n_\alpha!)$, gdy $(\alpha_1'\ldots\alpha_N')$ jest permutacją $(\alpha_1\ldots\alpha_N)$, przy czym n_α jest ilością cząstek w stanie α oraz $\{\alpha_1'\ldots\alpha_N'|\alpha_1\ldots\alpha_N\} = 0$ jeżeli nie jest permutacją.

Zadanie 3

3 bezspinowe bozony znajdują się w jednowymiarowym pudle o długości L z periodycznymi warunkami brzegowymi. Dana jest baza stanów $\{|k\rangle\}$, gdzie $k = \frac{2\pi n}{L}$ $(n \in \mathbb{Z})$, przy czym funkcje falowe to $\langle x|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}}\mathrm{e}^{ikx}$. Rozważyć trzy bozony znajdujące się w stanach $k_1 = 0$, $k_2 = \frac{2\pi}{L}$ oraz $k_3 = k_2$.

(a) Wypisz $|k_1, k_2, k_3\}$ oraz $|k_1, k_2, k_3\rangle$.

(b) Weź dowolny inny stan $|k_1', k_2', k_3'\} \neq |k_1, k_2, k_3\}$ i policz $\{\mathrm{k}_1', k_2', k_3'|k_1, k_2, k_3\}$.

(c) Oblicz $\{k_1, k_2, k_3|k_1, k_2, k_3\}$ oraz $\langle k_1, k_2, k_3|k_1, k_2, k_3\rangle$.

(d) Jak działa operator a_k na $|k_1, k_2, k_3\}$ dla dowolnego k?

(e) Oblicz $a_i^\dagger a_i|k_1, k_2, k_3\rangle$ dla $i = 1, 2, 3$.

Zadanie 4

3 elektrony o spinie $\frac{1}{2}$ znajdują się w jednowymiarowym pudle o długości L z periodycznymi warunkami brzegowymi. Rozważyć trzy elektrony w stanie $|\psi\rangle = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, przy czym elektrony znajdują się w stanach jednocząstkowych $\alpha_1 = (0, \uparrow)$, $\alpha_2 = (0, \downarrow)$ oraz $\alpha_3 = (\frac{2\pi}{L}, \uparrow)$, gdzie $\alpha_i = (k_i, \sigma_i)$. Podziałaj na $|\psi\rangle$ następującymi operatorami $a^\dagger_{\frac{2\pi}{L},\uparrow}$, $a^\dagger_{\frac{2\pi}{L},\downarrow}$, $a_{0,\uparrow}$, $a_{0,\downarrow}$, $a_{\frac{2\pi}{L},\uparrow}$ oraz $a_{\frac{2\pi}{L},\downarrow}$.