

Fizyka statystyczna B

zadania domowe #7

28 listopada 2017

Prosimy o zrobienie wszystkich zadań. Jedno z nich będzie zbierane przez wykładowcę na wykładzie w czwartek 7 grudnia. Powodzenia!

Zadanie 1

Bardziej realistyczne modele ciała stałego niż model Einsteina konstruujemy przyjmując, iż ciało stałe może być traktowane jako układ $3N$ niezależnych, jednowymiarowych i rozróżnialnych oscylatorów harmoniczných o różnych częstościach własnych. Rozkład częstości charakteryzujemy przez podanie funkcji $g(\omega)$ zdefiniowanej w taki sposób, że $g(\omega)d\omega$ jest ilością oscylatorów o częstości z przedziału $[\omega, \omega + d\omega]$. Zgodnie z teorią Debye'a

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{3V}{2\pi^2 v_0^3} \omega^2 & \text{gdy } \omega \leq \omega_{max}, \\ 0 & \text{gdy } \omega > \omega_{max}, \end{cases}$$

gdzie v_0 jest średnią prędkością dźwięku określoną ze związku

$$\frac{1}{v_0^3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_t^3} \right),$$

gdzie v_t jest prędkością fal poprzecznych, a v_l jest prędkością fal podłużnych, zaś wartość ω_{max} wynika ze związku

$$\int_0^{\omega_{max}} g(\omega) d\omega = 3N.$$

Wyznaczyć ciepło właściwe c_V ciała stałego zgodnie z tą teorią. Zbadać przypadek $T \gg T_D$ oraz $T \ll T_D$, gdzie $T_D = \frac{\hbar \omega_{max}}{k_B}$ jest temperaturą Debye'a. Układ znajduje się w kontakcie z termostatem o temperaturze T .

Zadanie 2

Układ fizyczny składa się z N cząsteczek rozmieszczonych w węzłach jednowymiarowej sieci krystalicznej. Każda cząsteczka może znajdować się w dwóch stanach spinowych, o spinie skierowanym do góry (\uparrow) lub o spinie skierowanym do dołu (\downarrow). Oddziałują ze sobą spiny najbliższych sąsiadów, przy czym energia oddziaływania wynosi $+J$ dla spinów równoległych ($\uparrow\uparrow$), ($\downarrow\downarrow$) i $-J$ dla pary spinów antyrównoległych ($\downarrow\uparrow$). Wykazać, że ciepło właściwe c_V takiego układu wynosi

$$\frac{C_V}{Nk_B} = \frac{x^2}{\cosh^2(x)}, \quad x = \frac{J}{k_B T}.$$

Wskazówka: Wprowadzić opis stanu układu za pomocą liczby N_+ par spinów skierowanych równolegle.

Zadanie 3

Kawntowy gaz doskonały znajduje się w stanie równowagi termodynamicznej. Wykazać, że fluktuacje liczby obsadzeń n_k jednocząstkowego stanu k dane są przez związki

$$\langle (\Delta n_k)^2 \rangle = \begin{cases} \langle n_k \rangle (1 - \langle n_k \rangle) & \text{dla fermionów,} \\ \langle n_k \rangle (1 + \langle n_k \rangle) & \text{dla bozonów,} \\ \langle n_k \rangle & \text{dla cząstek podlegającym statystyce Boltzmannu.} \end{cases}$$