Wykład Mechanika Kwantowa 2B,
zadania domowe 1
3 października 2016 roku

1. Pokazać, że stan $e^{ib\hat{\mathbf{p}}/\hbar}|x'\rangle$, gdzie $\hat{\mathbf{p}}$ oznacza operator pędu, jest stanem własnym operatora położenia $\hat{\mathbf{x}}$. Jakiej wartości własnej odpowiada ten stan ?

2. Dla układu dwupoziomowego, którego hamiltonian w bazie $\{\phi_1 >, |\phi_2 >\}$ ma postać:

$$H = \begin{bmatrix} E_1 & W_{12} \\ W_{21} & E_2 \end{bmatrix},$$

   a) Podać jawną postać operatora ewolucji.

   b) Wyznaczyć prawdopodobieństwo przejścia $|\phi_1 > \to |\phi_2 >$ w funkcji czasu.

   Wsk. Przedstawić hamiltonian za pomocą macierzy Pauliego i skorzystać z tożsamości (wyprowadzić) :

$$\exp[-i\vec{F}\cdot\vec{\sigma}] = \sigma_0 \cos|\vec{F}| - \frac{i}{|\vec{F}|}\vec{F}\cdot\vec{\sigma}\sin|\vec{F}|.$$

3. Spin 1/2 znajduje się w stanie

$$|\psi >= \cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\phi}{2}}|+> + \sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\phi}{2}}|->,$$

   gdzie $|\pm>$ - stany własne operatora $\hat{s}_z$.

   Skonstruować macierz gęstości w bazie $|\pm>$ i obliczyć wartości oczekiwane operatorów $\hat{s}_z, \hat{s}_x, \hat{s}_y, \hat{s}^2$.

4. Operator oddziaływania dwóch spinów ma postać $H = (\vec{\sigma}_{\mathbf{1}} \cdot \vec{\sigma}_{\mathbf{2}})^n$, gdzie $n = 1, 2, 3, ...$, a $\vec{\sigma}$ oznacza wektor macierzy Pauliego. Pokazać, że hamiltonian ten jest równoważny kombinacji $A + B\vec{\sigma}_{\mathbf{1}} \cdot \vec{\sigma}_{\mathbf{2}}$, z liczbami A, B zależnymi od n. Podać A i B dla $n = 3$ i 4.

   Wskazówka: Podziałać wyż. wym. operatorami na stan singletowy i trypletowy.