Wykład Mechanika Kwantowa 2B, zadania domowe 3 17 października 2016 roku

1. Wyznaczyć macierz gęstości cząstki swobodnej w kontakcie z termostatem o temperaturze T. (Feynman, Statistical Mechanics, A Set of Lectures, rozd. 2)

   Wsk.: Przyjąć hamiltonian cząstki:

   $$H = \frac{p^2}{2m},$$

   i wykazać, że nieunormowana macierz gęstości $\rho_U(x, x', \beta) = e^{-\beta H}$ spełnia równania ($\beta = 1/k_B T$, k_B stała Boltzmanna):

   $$-\frac{\partial}{\partial \beta}\rho_U(x, x', \beta) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\rho_U(x, x', \beta) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right)\rho_U(x, x', \beta)$$

   z warunkiem początkowym $\rho_U(x, x', \beta = 0) = \delta(x - x')$. Rozwiązania tych równań szukać w postaci funkcji Gaussa, zauważając, że jest to funkcja różnicy $x - x'$ (dlaczego?):

   $$\rho_U(x, x', \beta) = \exp\left[-(A(x - x')^2)\right].$$

2. Wyznaczyć funkcję Wignera dla macierzy gęstości z poprzedniego zadania.

3. Pokazać, że operatory rzutowania na stany własne skierowane równolegle i antyrównolegle do osi $\vec{n}$ można zapisać jako $Q(\vec{n}, \pm) = \frac{1}{2}(1 \pm \vec{n} \cdot \vec{\sigma})$ i obliczyć

   a) $\langle \Psi^- | Q^A(\vec{n}, +) Q^B(\vec{m}, +) | \Psi^- \rangle$

   b) $\langle \Psi^- | Q^A(\vec{n}, -) Q^B(\vec{m}, -) | \Psi^- \rangle$

   c) $\langle \Psi^- | Q^A(\vec{n}, +) Q^B(\vec{m}, -) | \Psi^- \rangle$

   d) $\langle \Psi^- | Q^A(\vec{n}, -) Q^B(\vec{m}, +) | \Psi^- \rangle$.

   Stan

   $$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_A |-\rangle_B - |-\rangle_A |+\rangle_B),$$

   wektory jednostkowe $\vec{n}$ i $\vec{m}$ są zawarte w płaszczyźnie (xz), a kąt między nimi wynosi Θ.

   Podać interpretację wyniku.

4. Pokazać, że stan Ψ układu dwudzielnego:

   $$|\Psi\rangle = \sum_{ij} d_{ij} |e_i\rangle_A \otimes |f_j\rangle_B,$$

   gdzie $\{e_i\}$ i $\{f_j\}$ bazy w przestrzeniach A i B, jest separowalny, gdy zredukowane operatory gęstości odpowiadają stanom czystym.