

**Wykład Mechanika Kwantowa 2B,
zadania domowe 5
9 listopada 2015 roku**

1. Znaleźć funkcję falową cząstki ze spinem $1/2$ o pędzie \vec{p} i ustalonym rzucie spinu $\pm\hbar/2$ na kierunek pędu.
2. Obliczyć wartości oczekiwane operatora składowych momentu pędu \hat{J}_x i \hat{J}_y w (nieunormowanym) stanie $|\phi\rangle = e^{\frac{\phi}{\hbar}\hat{J}_+}|j, -j\rangle$, gdzie $|jm\rangle$ oznacza stan własny operatorów \hat{J}^2 i \hat{J}_z o wartościach własnych odpowiednio równych $\hbar^2 j(j+1)$ oraz $\hbar m$, a ϕ jest pewną liczbą rzeczywistą.

Wsk.: Wyprowadzić tożsamość

$$e^{-\frac{\phi}{\hbar}\hat{J}_+}\hat{J}_-e^{\frac{\phi}{\hbar}\hat{J}_+} = \hat{J}_- - 2\phi\hat{J}_z - \phi^2\hat{J}_+$$

3. Pokazać, że $|\phi\rangle$ z poprzedniego zadania minimalizuje zasadę nieoznaczoności dla \hat{J}_x i \hat{J}_y (stan koherentny).

Wsk.: Pokazać, że stan $|\Psi\rangle$ minimalizuje relację nieoznaczoności dla operatorów \hat{A} i \hat{B} , gdy $(\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle)|\Psi\rangle = \lambda(\hat{B}-\langle\hat{B}\rangle)|\Psi\rangle$, gdzie λ jest liczbą urojoną.

4. Oznaczmy przez $Y_{l,m}$, $m = -l, \dots, l$ unormowane wektory własne operatora \hat{J}_z - rzutu momentu pędu na oś z o wartościach własnych $\hbar m$ oraz operatora \hat{J}^2 o wartościach własnych $\hbar^2 l(l+1)$ ($2l$ - liczba całkowita). Wiedząc, że $(\hat{J}_x \pm i\hat{J}_y)Y_{l,m} = N_{l,m\pm 1}Y_{l,m\pm 1}$

a) Wyznaczyć $N_{l,m\pm 1}$.

b) Podać wyrażenia na elementy macierzowe $J_{x,y,z}$ w tej bazie.

c) Wypisać w postaci jawnej te macierze dla $l = 1$ i $l = 1/2$.