Wykład Mechanika Kwantowa 2B,
zadania domowe 6
28 listopada 2016 roku

1. Niech $a(e_i)$ i $a(f_i)$ oznaczają operatory anihilacji dla stanów należących do baz ortonormalnych $\{e_i\}$ i $\{f_j\}$. Pokazać, że

$$\sum_i a^\dagger(f_i)a(f_i) = \sum_j a^\dagger(e_j)a(e_j)$$

2. Podać równanie ruchu dla operatorów anihilacji w bazie $\{\phi_n(t)\}$ jeśli $a_n(t) \overset{ozn}{=} a(\phi_n(t))$, a funkcje bazy spełniają równanie Schrödingera:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi_n(t) = \hat{H}\phi_n(t)$$

z jednocząstkowym hamiltonianem $\hat{H}$.

Wsk.: skorzystać z antyliniowości $a(\phi_n)$ względem ϕ_n.

3. Pokazać, że dla układu dwupoziomowego reprezentowanego przez operatory anihilacji a_i i kreacji $a_i^\dagger$ w stanie $|\phi_i\rangle$, $i = 1, 2$ następujące operatory

$$\hat{S}_+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y = a_2^\dagger a_1, \quad \hat{S}_- = \hat{S}_x - i\hat{S}_y = a_1^\dagger a_2, \quad \hat{S}_z = \frac{1}{2}(a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_1)$$

spełniają takie same relacje komutacji jak operatory odpowiednich składowych momentu pędu.

4. Znaleźć stany i energie własne hamiltonianu

$$H = (E_0 + \Delta)a^\dagger a \ + \frac{1}{2}\Delta(a^\dagger a^\dagger + a\ a\ )$$

gdzie a i $a^\dagger$ są operatorami anihilacji i kreacji bozonu w pewnym stanie ϕ, a parametry rzeczywiste E_0 i Δ są dodatnie.

Wsk.: A.L. Fetter, J.D. Walecka “Kwantowa teoria układów wielu cząstek” str. 304