Wykład Mechanika Kwantowa 2B,
zadania domowe 7
5 grudnia 2016 roku

1. Pokazać, że dla układu wielu cząstek (bozonów lub fermionów) z hamiltonianem w reprezentacji drugiej kwantyzacji:

$$H = \sum_{\sigma} \int \mathrm{d}^3 r \hat{\psi}^\dagger_\sigma(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right] \hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} \int \mathrm{d}^3 r \int \mathrm{d}^3 r' \hat{\psi}^\dagger_\sigma(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger_{\sigma'}(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \hat{\psi}_{\sigma'}(\mathbf{r}') \hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r})$$

następujące wielkości są stałymi ruchu:
a) całkowita liczba cząstek
b) całkowity pęd
c) całkowity moment pędu
d) całkowity spin.

2. Hamiltonian układu elektronów sprzężonych z drganiami sieci krystalicznej w reprezentacji fal płaskich ma postać:

$$H = \hbar\omega_0 \sum_{\mathbf{k}} b^\dagger_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} a^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}} (b_{\mathbf{q}} + b^\dagger_{-\mathbf{q}})$$

gdzie $a_{\mathbf{k}}$ i $b_{\mathbf{k}}$ reprezentują odpowiednio operatory anihilacji elektronu i fononu o pędzie $\hbar\mathbf{k}$, $E_{\mathbf{k}}$ jest energią elektronu, a ω_0 – częstością fononu. Sprzężenie elektron-fonon reprezentowane jest przez stałe $V_{\mathbf{q}}$. Pokazać bezpośrednim rachunkiem, że całkowity pęd elektronów i fononów

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{p}} \hbar\mathbf{p} a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} \quad + \quad \sum_{\mathbf{k}} \hbar\mathbf{k} b^\dagger_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}$$

jest całką ruchu dla tego hamiltonianu.

3. Drgania jednowymiarowego łańcucha N atomów o długości L opisane są za pomocą hamiltonianu

$$H_0 = \sum_k \hbar\omega (a^\dagger_k a_k + \frac{1}{2}),$$

gdzie $a^\dagger_k$ oznacza operator kreacji fononu z liczbą falową $k = \frac{\pi}{L}(-N + 2n)$, $n = 0, \ldots, N-1$. Obliczyć zmianę energii stanu podstawowego tego układu pod wpływem zaburzenia wywołanego oddziaływaniem z punktową domieszką umieszczoną w początku układu współrzędnych:

$$H' = \sum_k v_k (a_k + a^\dagger_{-k}),$$

gdzie $v_k = v_{-k}$ oznacza stałą sprzężenia domieszki z fononami.

4. Pokazać, że strumień energii dla harmonicznego łańcucha atomów o hamiltonianie

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}}(a^{\dagger}_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2})$$

dany jest wzorem

$$S_E = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{k}} (\hbar\omega_{\mathbf{k}})^2 a^{\dagger}_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}.$$