

Podstawy Fizyki III

Optyka z elementami fizyki współczesnej

wykład 15, 23.11.2017

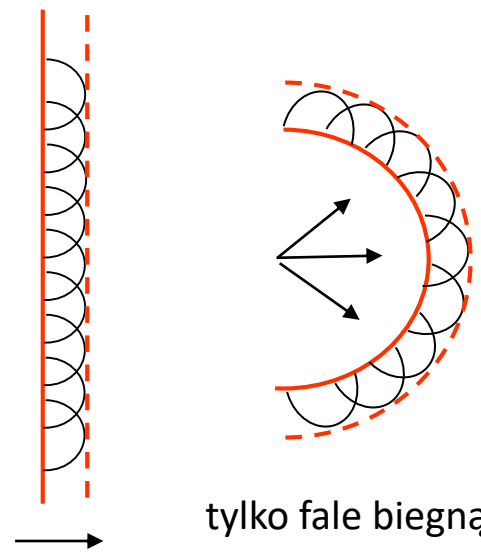
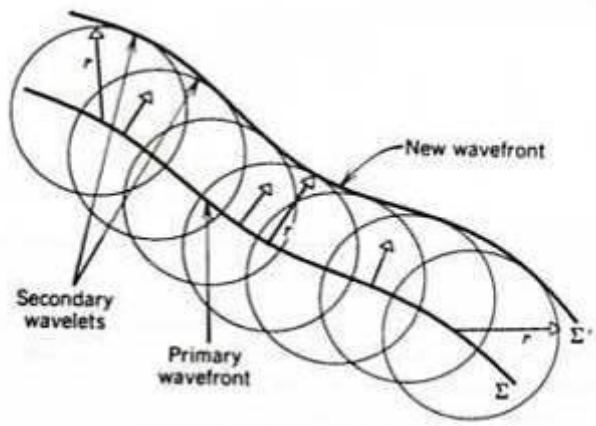
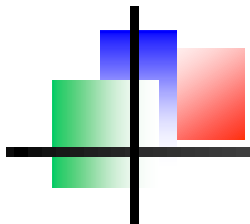
wykład:	Czesław Radzewicz
pokazy:	Mateusz Winkowski, Łukasz Zinkiewicz
ćwiczenia:	Radosław Łapkiewicz



Wykład 14 - przypomnienie

- interferencja nieskończenie wielu fal monochr. o różnych kierunkach
– wiązka gaussowska, zasada nieoznaczoności
- przyosiowe r-nie Helmholtza, wyprowadzenie wiązki gaussowskiej
- wiązki TEM
- własności wiązki gaussowskiej
- parametr M^2
- prawo ABCD dla wiązek gaussowskich

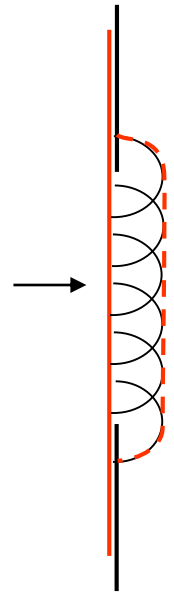
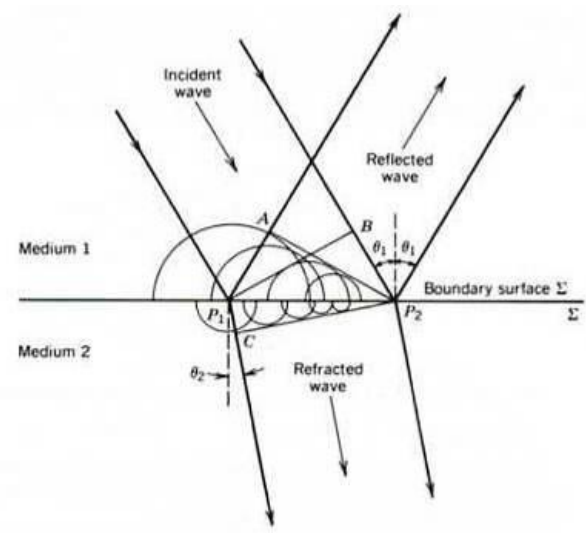
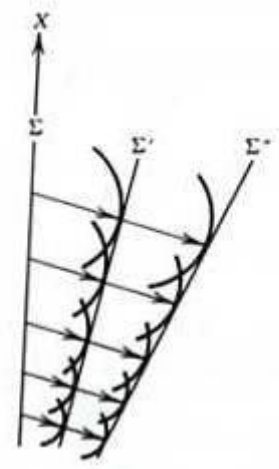
konstrukcja Huygensa, 1



tylko fale biegnące do przodu!!!



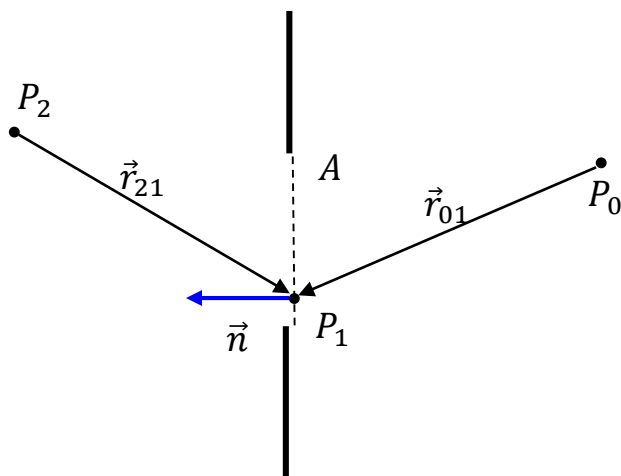
Christiaan Huygens
1629-1695



?

całka Fresnela-Kirchoffa

model skalarny (zaniedbujemy polaryzację światła)



pole na powierzchni A

$$E_A = \frac{E}{r_{21}} e^{ikr_{21}}$$

wkład do pola w P_0 od małego elementu dA (mały oznacza taki, dla którego pole jest stałe)

$$dE_0 = \frac{E_A}{r_{01}} e^{ikr_{01}} dA = \frac{E}{r_{21}r_{01}} e^{ik(r_{01}+r_{21})} dA$$

Formuła Kirchoffa-Fresnela

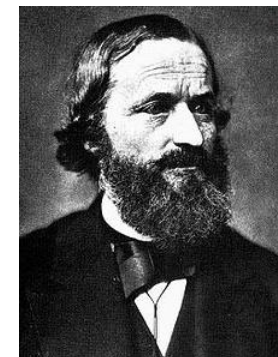
$$E(P_0) = \frac{E}{i\lambda} \iint \frac{e^{ik(r_{01}+r_{21})}}{r_{21}r_{01}} \frac{\cos \Theta_0 - \cos \Theta_2}{2} dA$$

gdzie kąty Θ_0 i Θ_2 to

$$\Theta_0 = \sphericalangle(\vec{n}, \vec{r}_{01}), \quad \Theta_2 = \sphericalangle(\vec{n}, \vec{r}_{21})$$



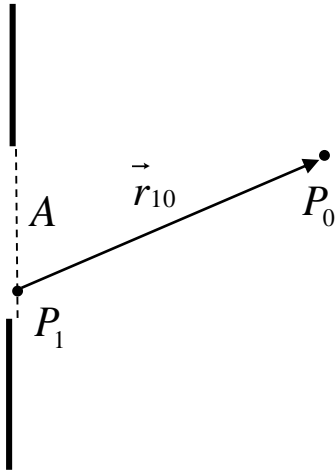
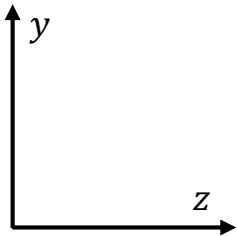
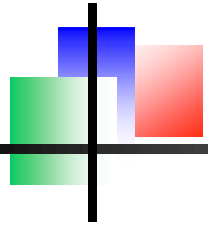
Augustine Fresnel
1788-1827



Gustaw Kirchoff
1824-1887

Uwaga teoretyczna: całkę Kirchoffa można wyprowadzić z równania Helmholtza i twierdzenia Greena

Formuła Sommerfelda

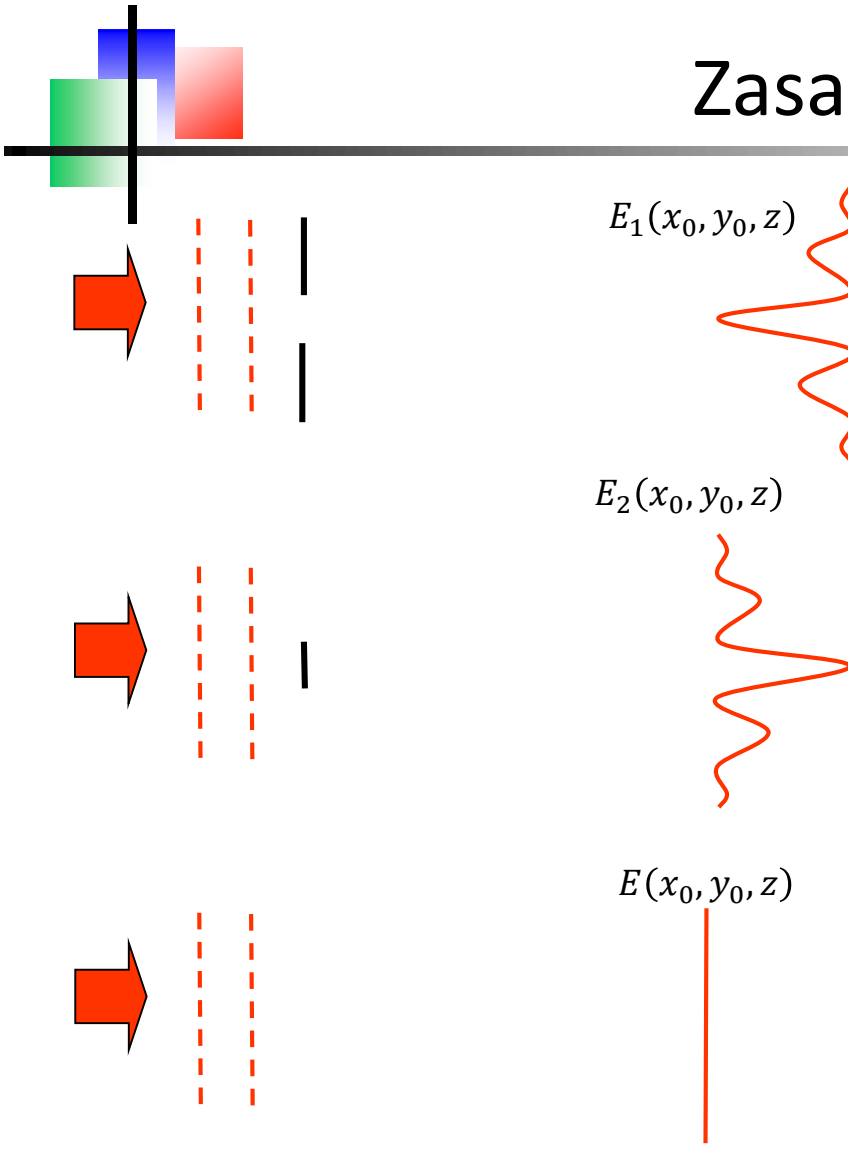


Arnold Sommerfeld
1868-1951

Formuła Sommerfelda

$$E(x_0, y_0, z) = \frac{1}{i\lambda} \iint_A E(x, y, 0) \frac{z}{r_{01}} \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} dx dy$$

Zasada Babineteta



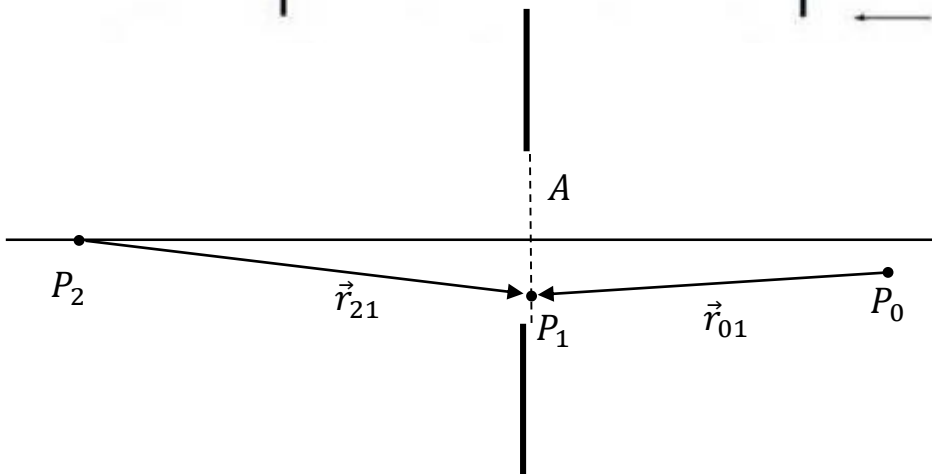
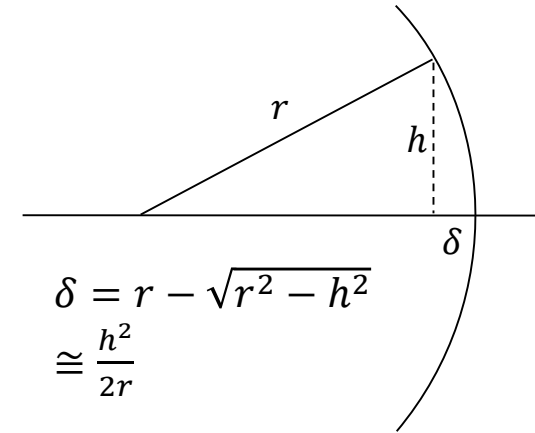
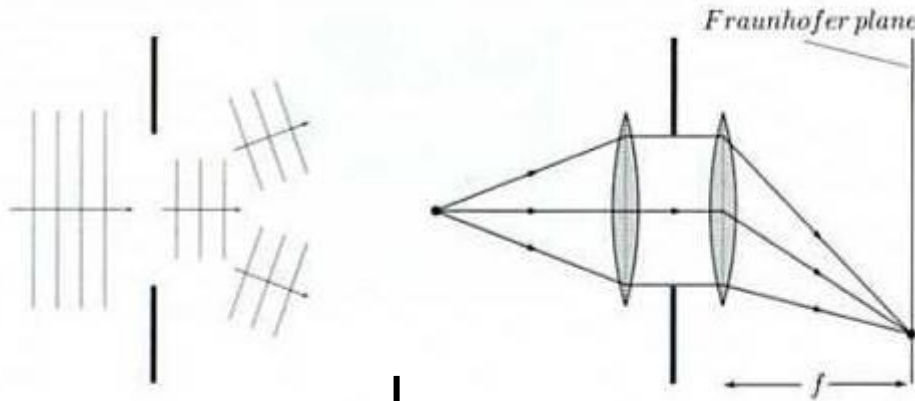
Jacques Babinet
1794-1872

$$E(x_0, y_0, z) = E_1(x_0, y_0, z) + E_2(x_0, y_0, z)$$

Uwaga: w rzeczywistości amplituda pola jest wielkością zespoloną i rysunki powyżej należy traktować wyłącznie jako ilustrację pomysłu Babineteta a nie rzeczywiste rozkłady pola

Dyfrakcja Fraunhofer, 1

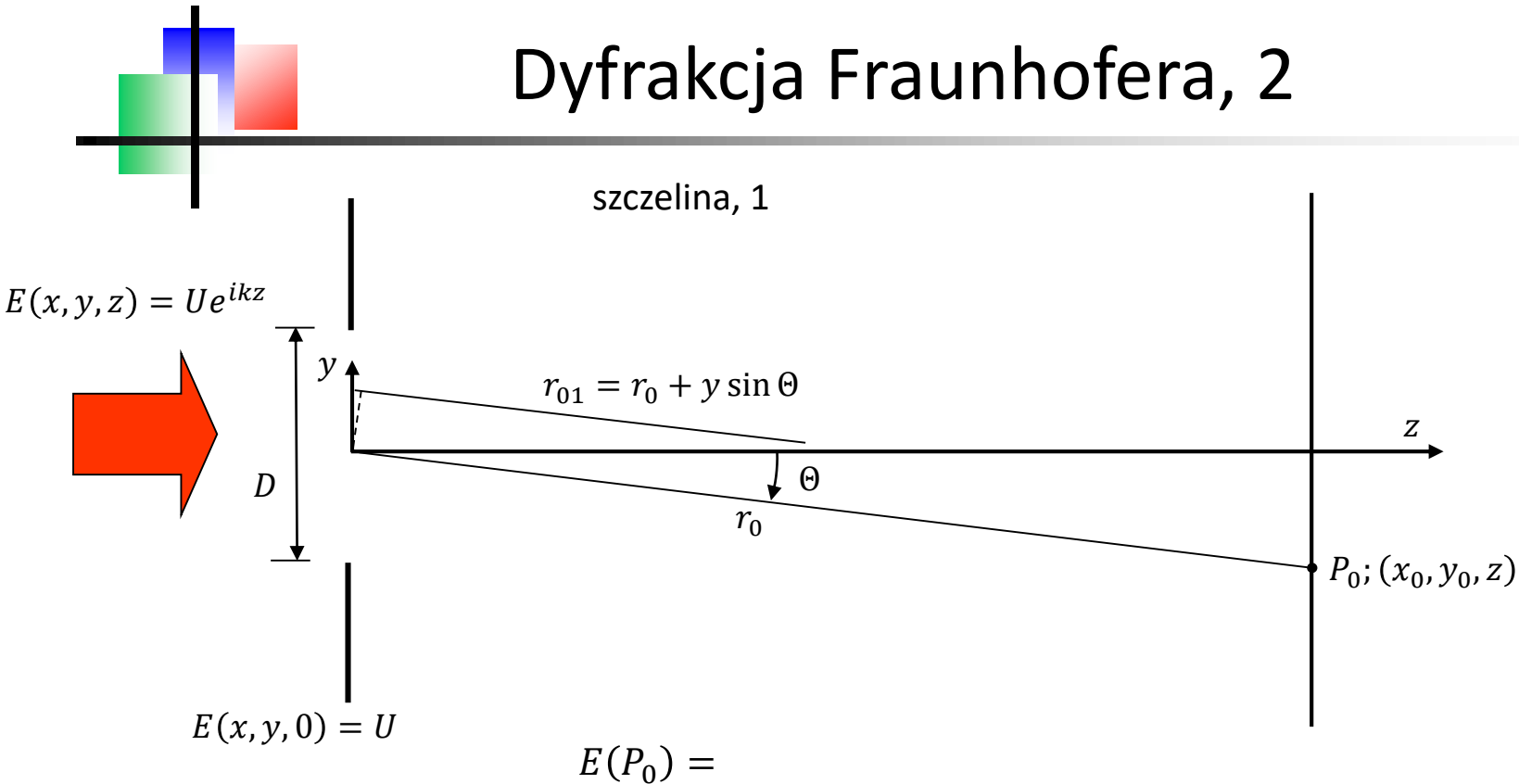
na wejściu i na wyjściu mamy fale płaskie



Przybliżenie Fraunhofera: $\delta \cong \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{r_{21}} + \frac{1}{r_{01}} \right) \ll \lambda$

Liczba Fresnela $N_F = \frac{h^2}{r\lambda} \ll 1$ dla Fraunhofera

Dyfrakcja Fraunhofer, 2



$$E(P_0) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{CU}{r_{01}} \iint_A e^{ikr_{01}} dx dy \\
 &= C' \int_{-D/2}^{D/2} e^{ik(r_0 + y \sin \theta)} dy \\
 &= C'' \frac{\sin \beta}{\beta} = C'' \text{sinc}(\beta)
 \end{aligned}$$

$$\text{gdzie } \beta = \frac{kD \sin \theta}{2}$$

funkcja sinc:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Dyfrakcja Fraunhofer, 3

szczelina, 2

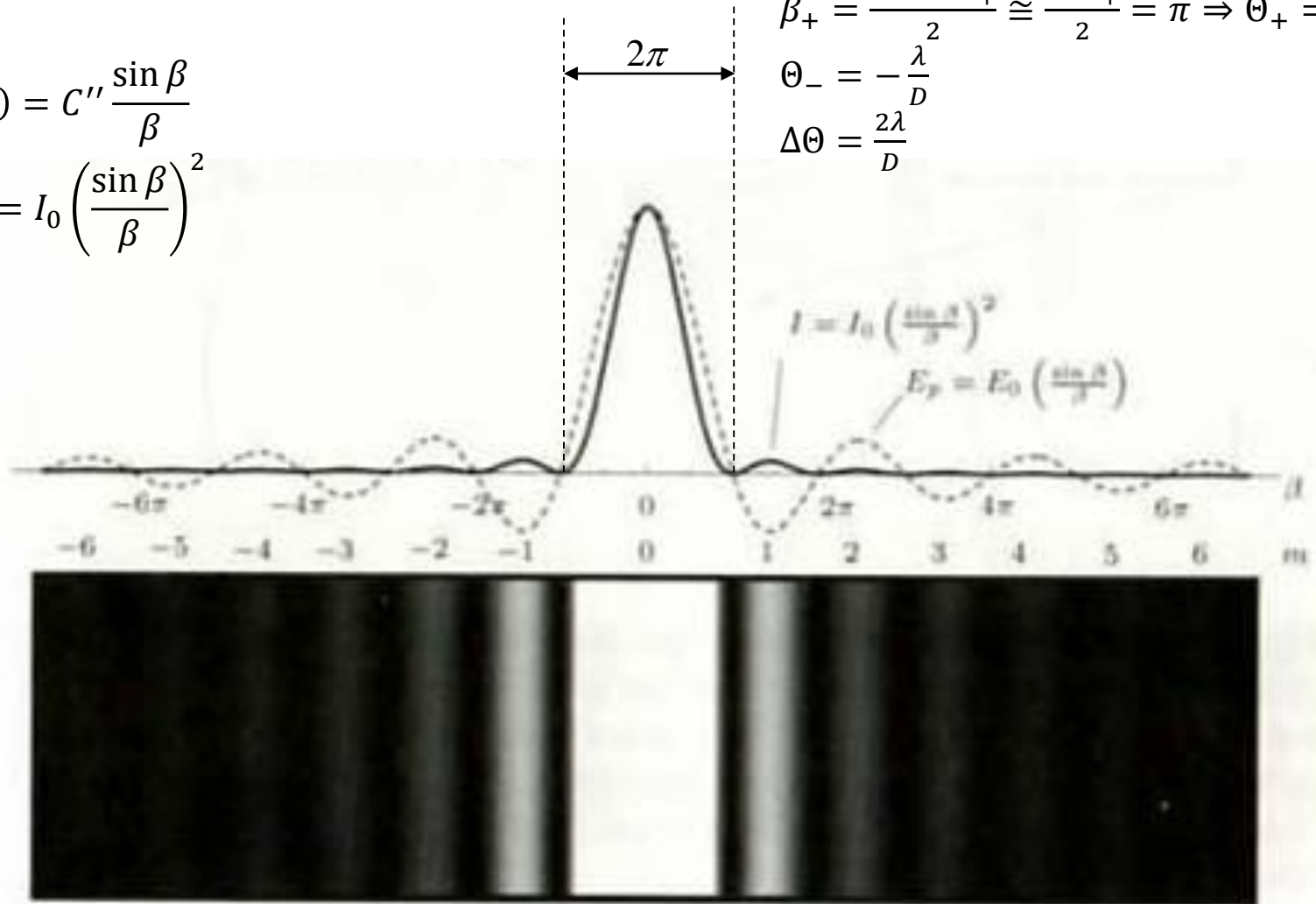
$$E(\beta) = C'' \frac{\sin \beta}{\beta}$$

$$I(\beta) = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

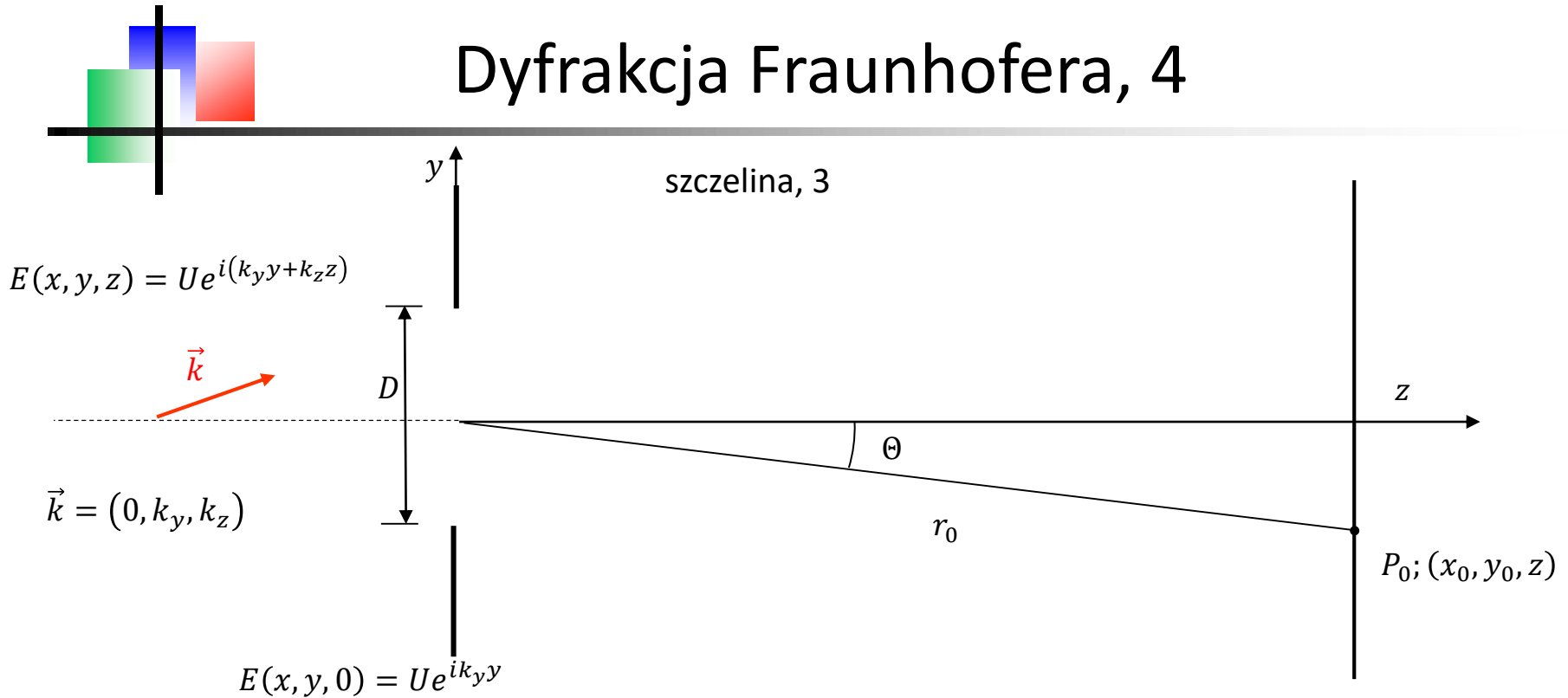
$$\beta_+ = \frac{kD \sin \Theta_+}{2} \cong \frac{kD\Theta_+}{2} = \pi \Rightarrow \Theta_+ = \frac{\lambda}{D}$$

$$\Theta_- = -\frac{\lambda}{D}$$

$$\Delta\Theta = \frac{2\lambda}{D}$$



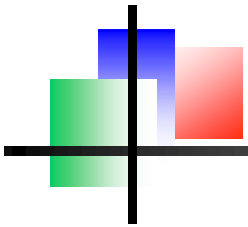
Dyfrakcja Fraunhofer, 4



$$\begin{aligned}
 E(P_0) &= C \iint_A E(x, y, 0) e^{ikr_{01}} dA = \\
 &\cong CU \iint_A e^{ikr_{01}} e^{ik_y y} dx dy \\
 &= C' \iint_A e^{ik(r_0 - y \sin \theta) + ik_y y} dy \\
 &= C'' \frac{\sin \beta}{\beta}
 \end{aligned}$$

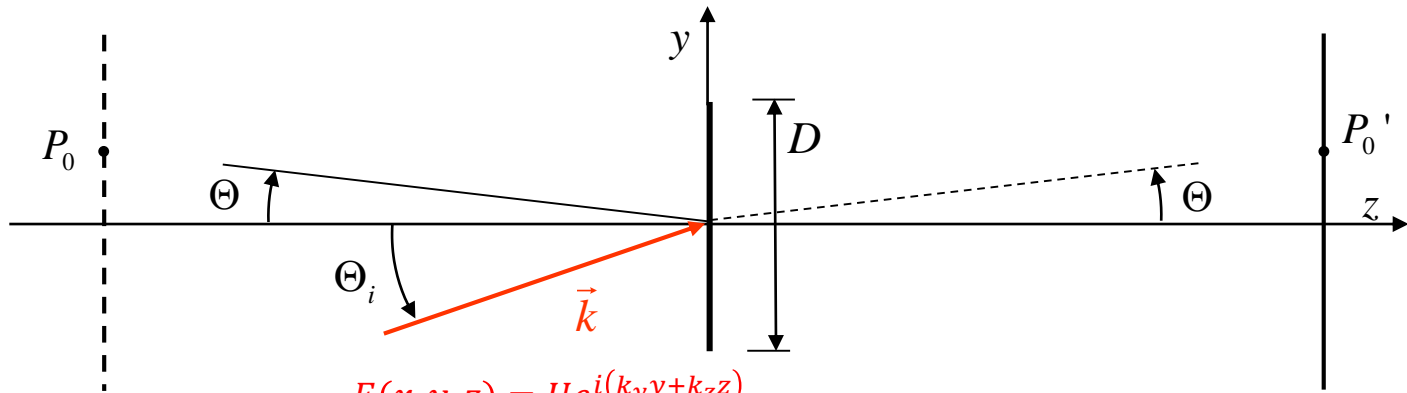
gdzie $\beta = \frac{D(k \sin \theta - k_y)}{2}$

centralny prążek dla
 $\sin \theta = k_y / k$



Dyfrakcja Fraunhofer, 5

odbicie od wąskiego lustra



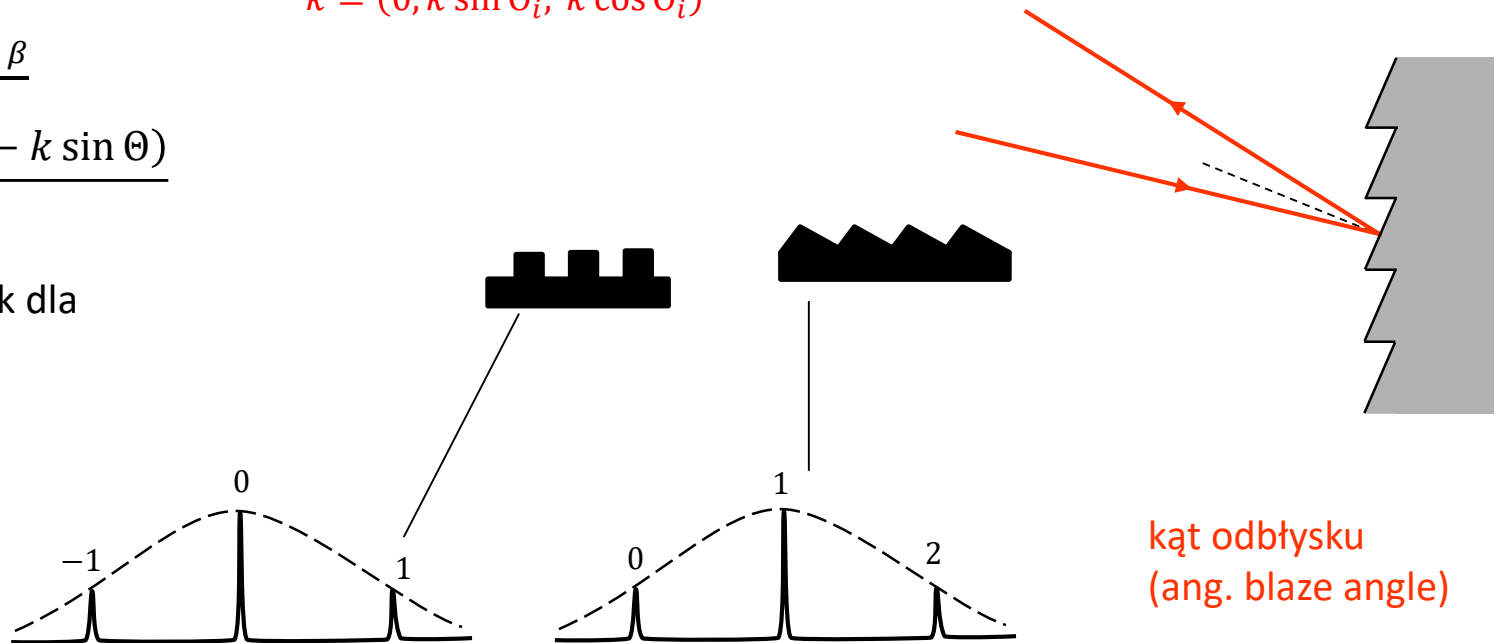
$$E(x, y, z) = U e^{i(k_y y + k_z z)}$$

$$\vec{k} = (0, k \sin \Theta_i, k \cos \Theta_i)$$

$$E(P_0) = C'' \frac{\sin \beta}{\beta}$$

$$\beta = \frac{D(k \sin \Theta_i - k \sin \Theta)}{2}$$

centralny prążek dla
 $\Theta = \Theta_i$

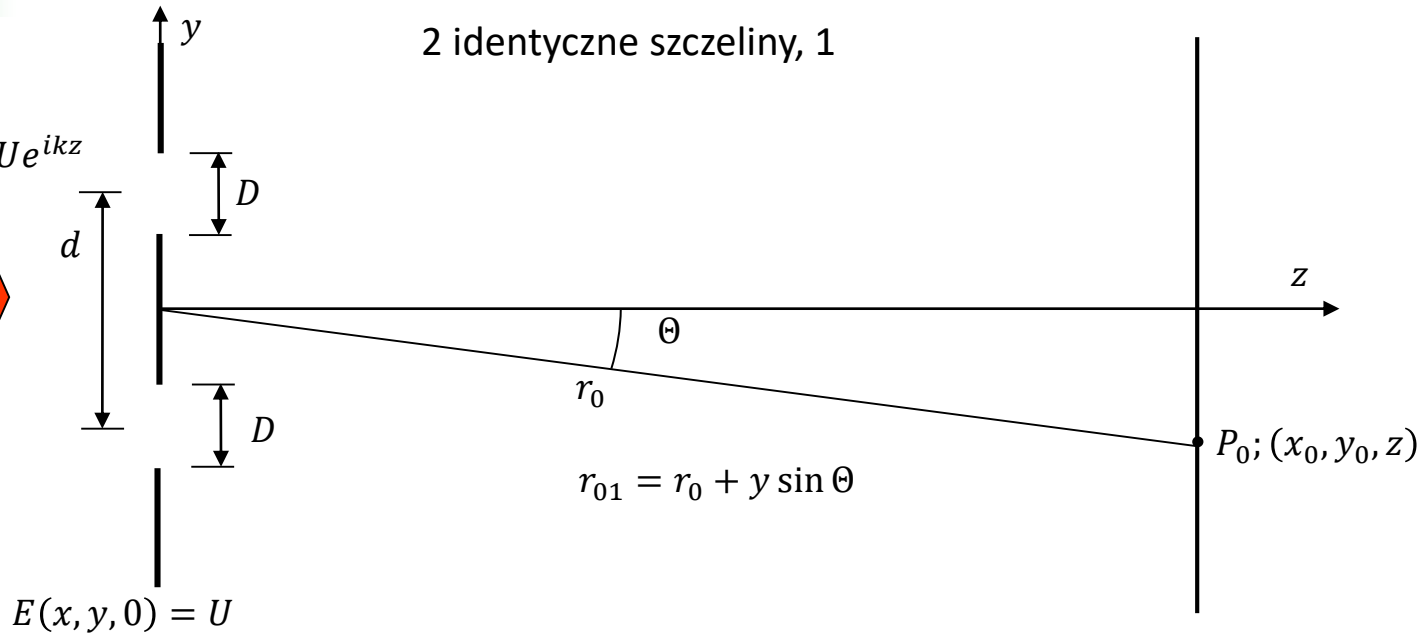
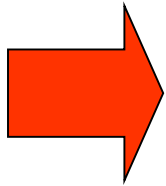


kąt odbłyску
(ang. blaze angle)

Dyfrakcja Fraunhofer, 6

2 identyczne szczeliny, 1

$$E(x, y, z) = Ue^{ikz}$$



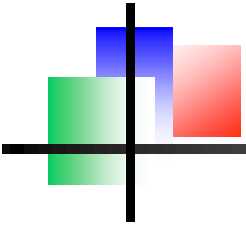
$$E(x, y, 0) = U$$

$$E(P_0) = C \int_{-(d+D)/2}^{-(d-D)/2} e^{ik(r_0 - y \sin \Theta)} dy + C \int_{(d-D)/2}^{(d+D)/2} e^{ik(r_0 - y \sin \Theta)} dy$$

$$= \dots = C'' \frac{\sin \beta}{\beta} \cos \gamma$$

gdzie

$$\beta = \frac{kD \sin \Theta}{2}, \quad \gamma = \frac{kd \sin \Theta}{2}$$



Dyfrakcja Fraunhofer, 7

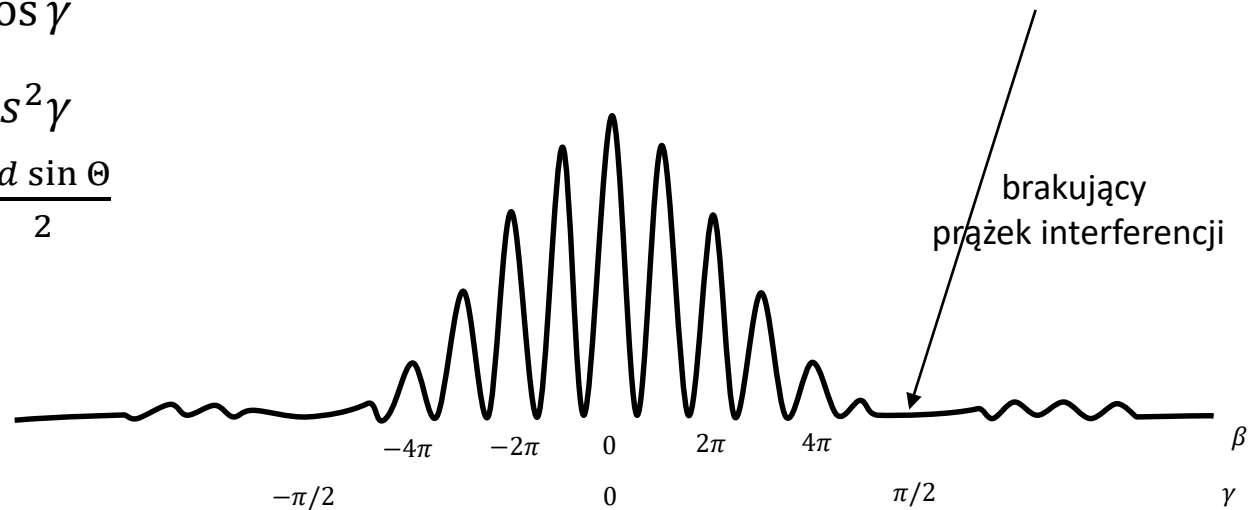
2 identyczne szczeliny, 2

$$E(P_0) = C'' \frac{\sin \beta}{\beta} \cos \gamma$$

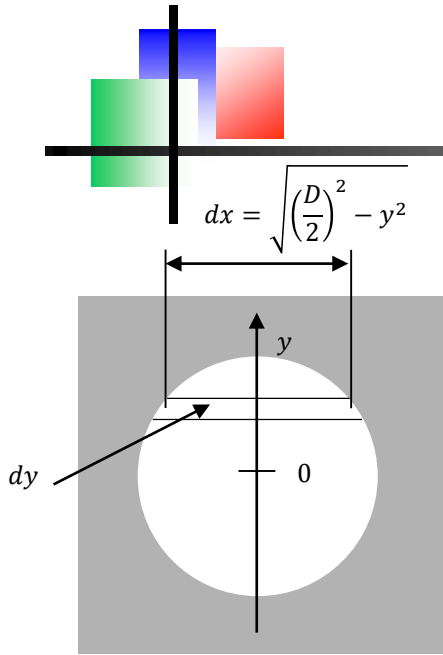
$$I(P_0) = I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \cos^2 \gamma$$

$$\beta = \frac{kD \sin \Theta}{2}, \quad \gamma = \frac{kd \sin \Theta}{2}$$

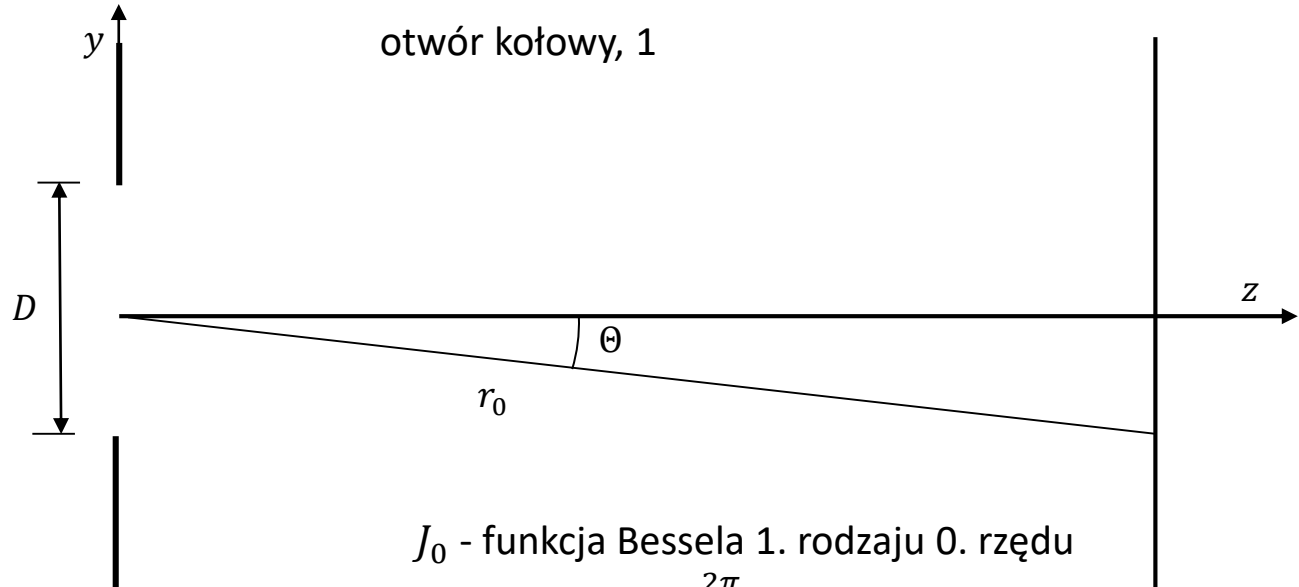
$$\beta = \frac{kd \sin \Theta_{+1}}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \beta_{+1} = \frac{\lambda}{2d}$$



Dyfrakcja Fraunhofera, 8



$$dx = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - y^2}$$



J_0 - funkcja Bessela 1. rodzaju 0. rzędu

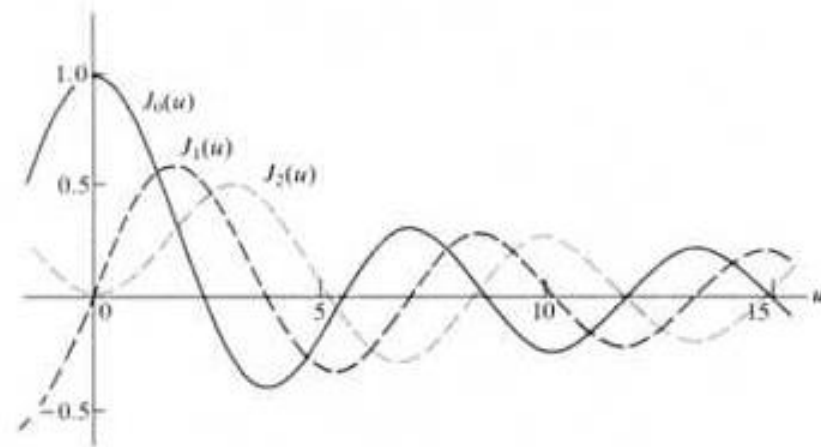
$$J_m(\sigma) = \frac{i^{-m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(mv + \sigma \cos v)} dv$$

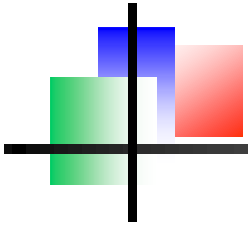
$$E(P_0) = C \iint E(x, y, 0) e^{ikr_{01}} dA =$$

$$= C' \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} e^{iky \sin \theta} \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - y^2} dy$$

$$= \dots = C'' \frac{J_0(\sigma)}{\sigma}$$

gdzie $\sigma = \frac{kD \sin \theta}{2}$





Dyfrakcja Fraunhofer, 9

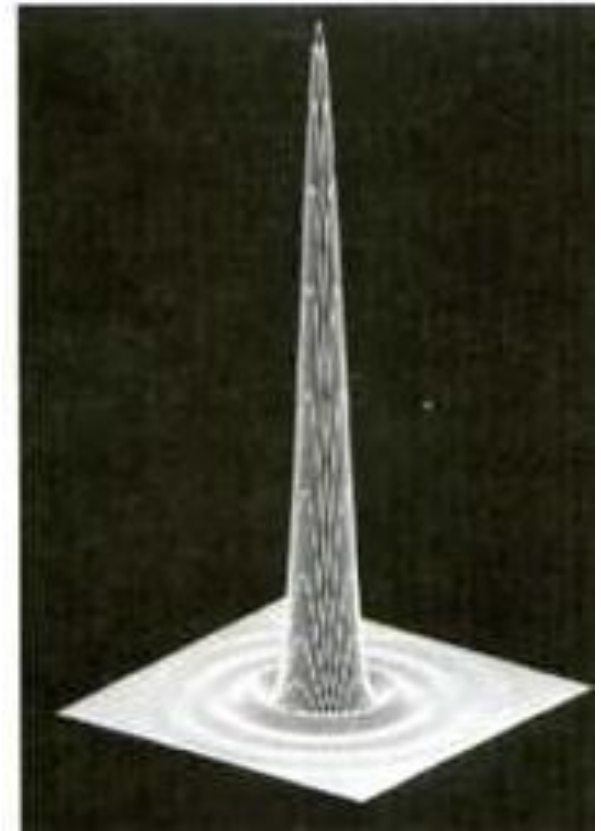
otwór kołowy, 2

$$E(P_0) = C'' \frac{J_0(\sigma)}{\sigma}$$

$$I(P_0) = I_0 \left(\frac{J_0(\sigma)}{\sigma} \right)^2$$

$$\sigma = \frac{kD \sin \theta}{2}$$

dysk Airy

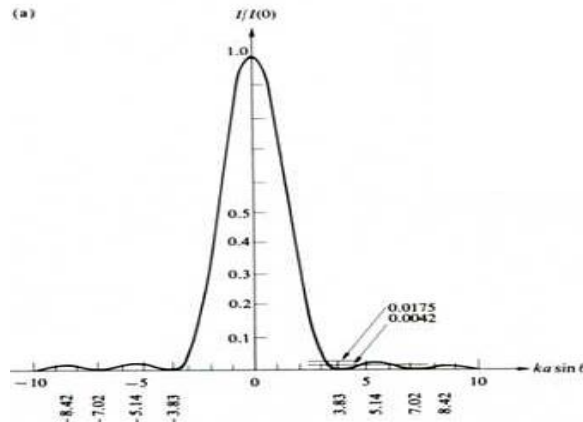


Pierwszy ciemny pierścień dla:

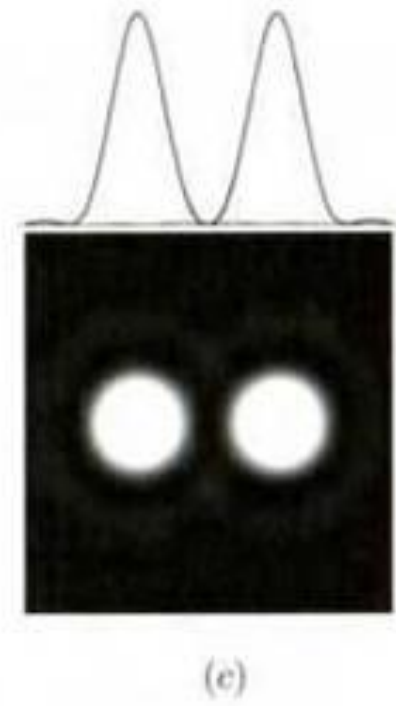
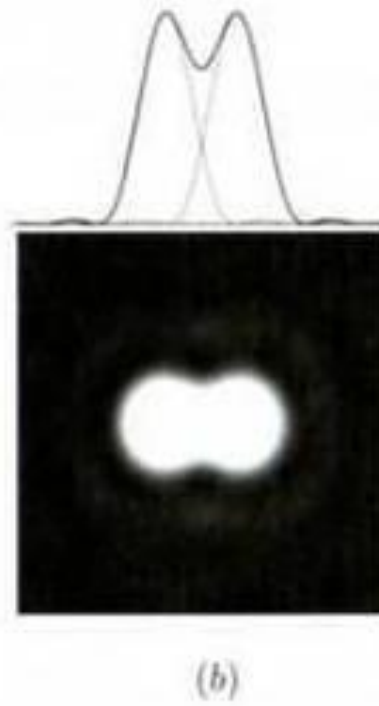
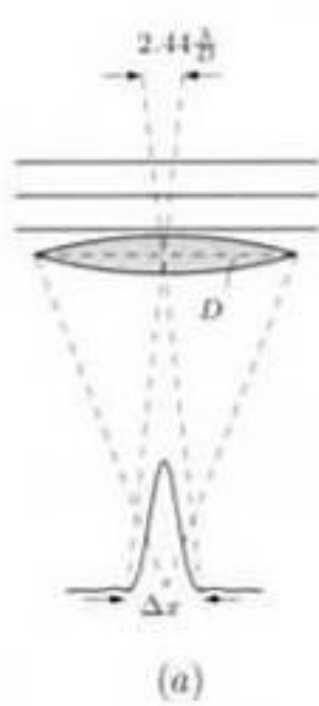
$$\sigma = \frac{kD \sin \theta}{2} = \frac{\pi D \sin \theta}{\lambda} \cong 3.83$$

skąd

$$\sin \theta \cong \frac{3.83 \lambda}{\pi D} \cong 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

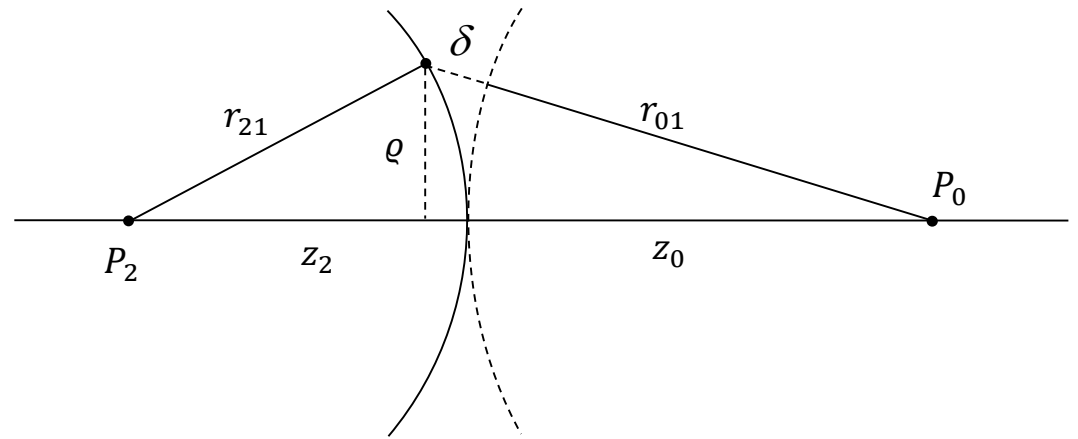
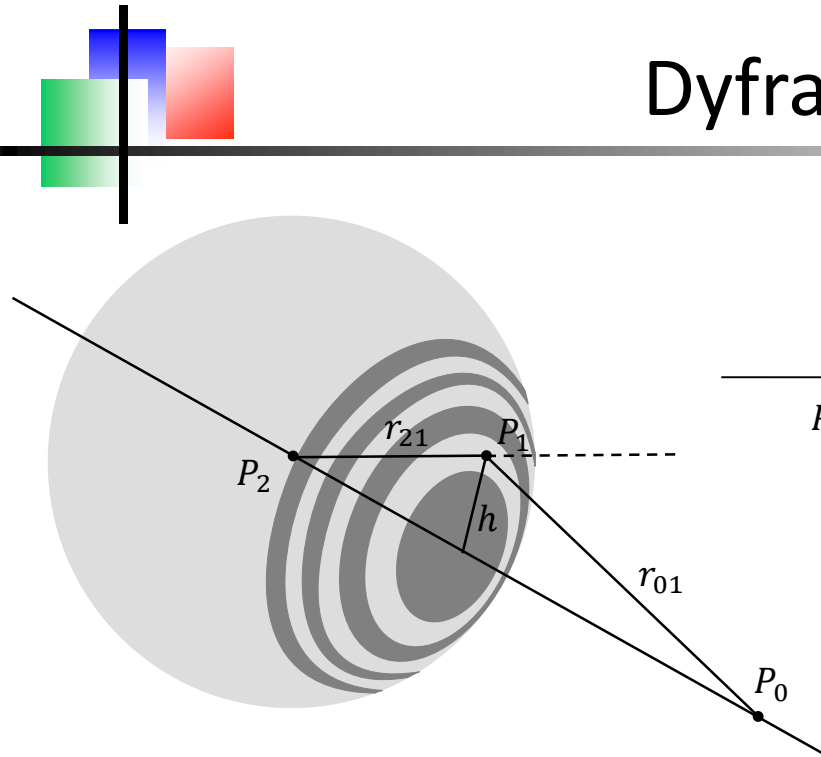


Dyfr. Fraunhofera, rozdzielczość obrazowania



$$\sin \theta \cong \frac{3.83 \lambda}{\pi D} \cong 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

Dyfrakcja Fresnela



$$\begin{aligned}
 r_{01} + r_{21} &= \sqrt{z_0^2 + q^2} + \sqrt{z_2^2 + q^2} \\
 &= z_0 \left(1 + \frac{q^2}{2z_0^2} - \frac{q^4}{8z_0^4} + \dots \right) + z_2 \left(1 + \frac{q^2}{2z_2^2} - \frac{q^4}{8z_2^4} + \dots \right) \\
 &\cong z_0 + z_2 + \frac{q^2}{2} \left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_2} \right) - \frac{q^4}{8} \left(\frac{1}{z_0^3} + \frac{1}{z_2^3} \right) + \dots
 \end{aligned}$$

Formuła Kirchoffa-Fresnela

$$\begin{aligned}
 E(P_0) &= \frac{1}{i\lambda} \iint_A \frac{e^{ik(r_{01}+r_{21})}}{r_{21}r_{01}} \frac{\cos \Theta_0 - \cos \Theta_2}{2} dA \\
 &\cong \frac{1}{i\lambda z_0 z_2} \iint_A e^{ik(r_{01}+r_{21})} dA
 \end{aligned}$$

Rozwinięcie w szereg Taylora

$$\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots$$

przypomnienie: przybliżenie Fraunhoffera

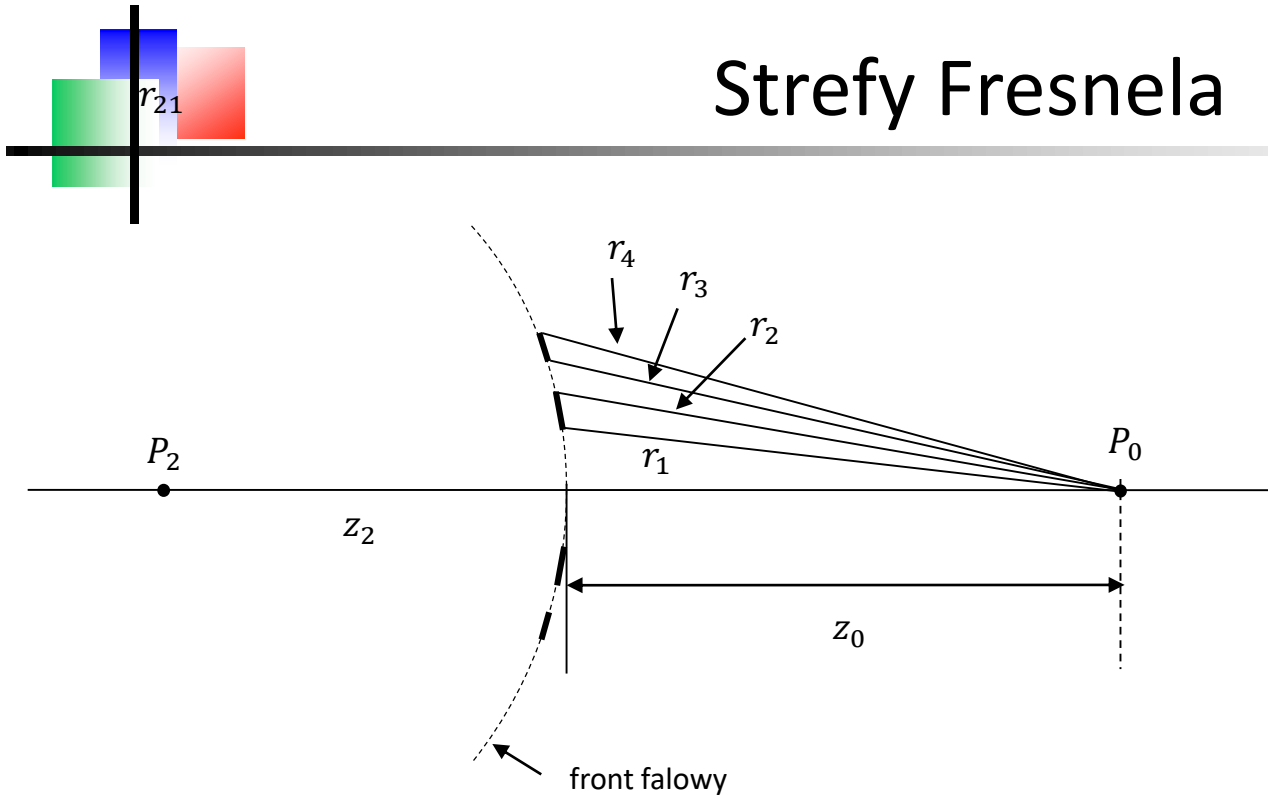
$$\frac{q^2}{2} \left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_2} \right) \ll \lambda$$

przybliżenie Fresnela

$$\frac{q^4}{8} \left(\frac{1}{z_0^3} + \frac{1}{z_2^3} \right) \ll \lambda$$

$$r_{01} + r_{21} \cong z_0 + z_2 + \frac{q^2}{2} \left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_2} \right)$$

Strefy Fresnela



$$r_1 = z_0 + \frac{\lambda}{2}$$

$$r_2 = z_0 + 2\frac{\lambda}{2}$$

$$\dots$$

$$r_m = z_0 + m\frac{\lambda}{2}$$

Formuła Kirchoffa-Fresnela

$$E(P_0) \cong \frac{1}{i\lambda z_0 z_2} \iint_A e^{ik(r_{01}+r_{21})} dA$$

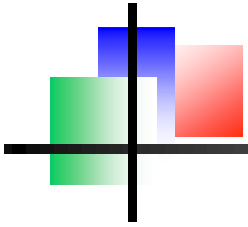
Strefy:

1. Obszar ograniczony przez r_1 daje pole E_0
2. Pierścień ograniczony przez $r_1 \div r_2$ daje pole E_1
3. Pierścień ograniczony przez $r_2 \div r_3$ daje pole E_2
4. Pierścień ograniczony przez $r_3 \div r_4$ daje pole E_3
5.

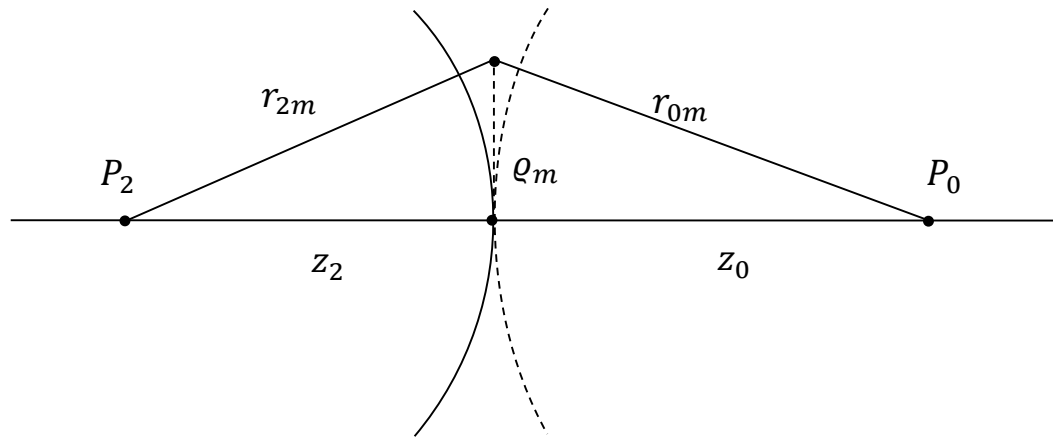
Pole całkowite:

$$E = E_0 + E_1 + E_2 + E_3 + \dots$$

$$\cong E_0 - |E_1| + E_2 - |E_3| + \dots$$



transmisyjna płytką strefowa Fresnela



$$r_{2m} + r_{0m} - (z_2 + z_0) = m \frac{\lambda}{2}$$

$$\sqrt{z_2^2 + \varrho_m^2} + \sqrt{z_0^2 + \varrho_m^2} - (z_2 + z_0) = m \frac{\lambda}{2}$$

obrazowanie

$$\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_0} = \frac{m\lambda}{\varrho_m^2} = \frac{1}{f}$$

dla rozsądnej jasności

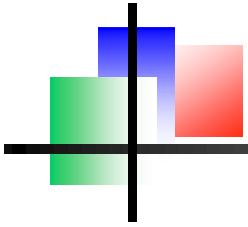
$$r_{2m} \cong z_2 + \frac{\varrho_m^2}{2z_2}, r_{0m} \cong z_0 + \frac{\varrho_m^2}{2z_0}$$

skąd

$$\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_0} = \frac{m\lambda}{\varrho_m^2}$$

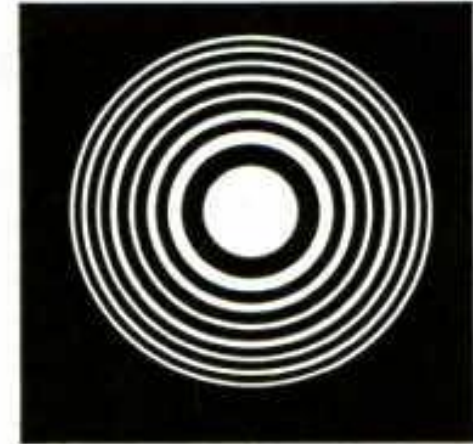
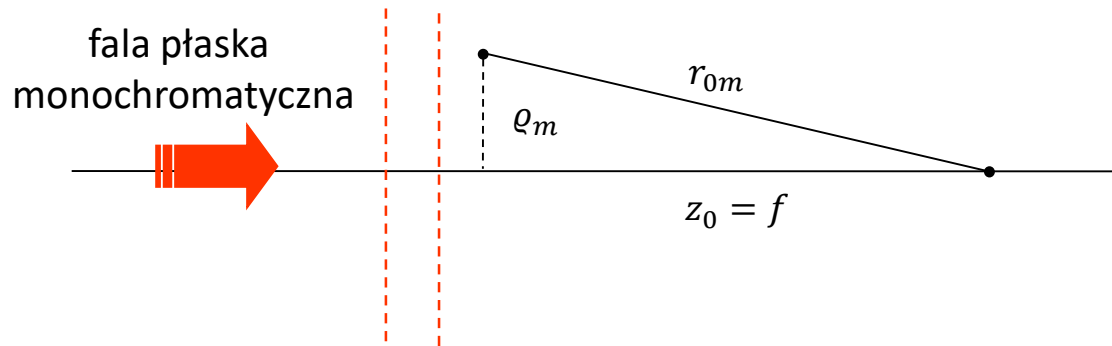
czyli

$$\varrho_m = \sqrt{\frac{m\lambda}{\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_0}}}$$



transmisyjna płytka strefowa Fresnela, 2

ogniskowanie



Dla $z_2 = \infty$ mamy ogniskowanie; $q_m = \sqrt{m\lambda f}$

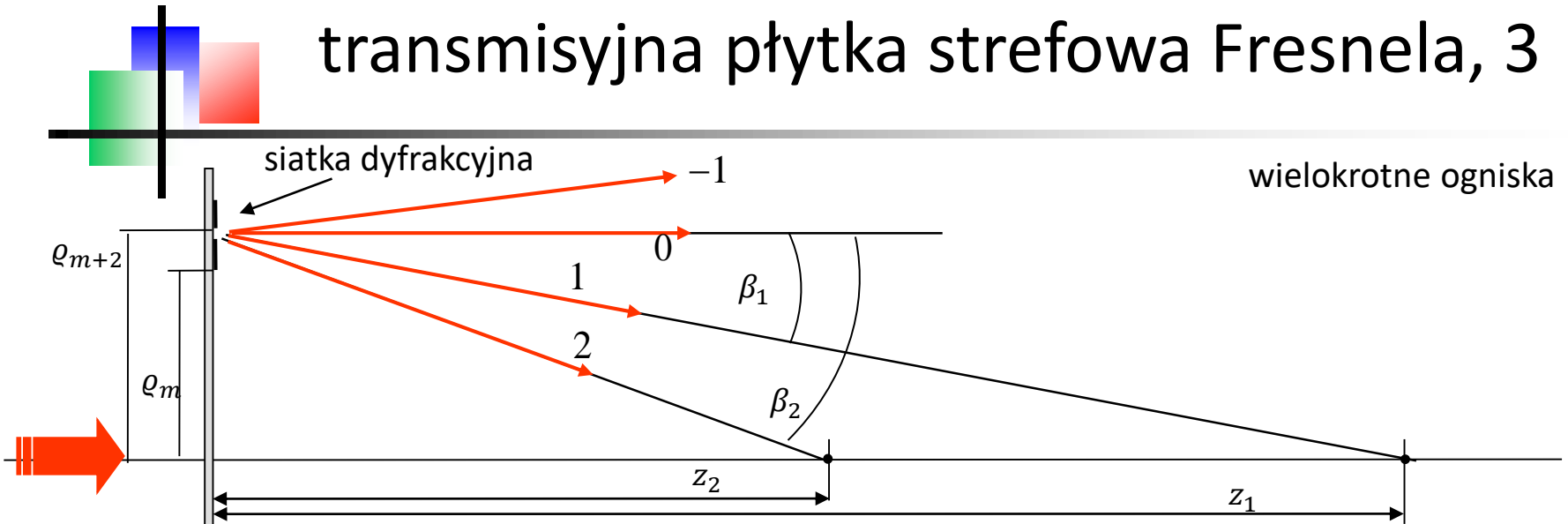
Uwaga na aberracje chromatyczne soczewki Fresnela; jeśli mamy soczewkę o danej ogniskowej f_1 dla danej długości fali λ_1 to

$$\frac{1}{f_1} = \frac{m\lambda_1}{q_{m1}^2} \Rightarrow q_{m1}^2 = m\lambda_1 f_1$$

i dla innej długości fali λ_2

$$\frac{1}{f_2} = \frac{m\lambda_2}{q_{m1}^2} = \frac{m\lambda_2}{m\lambda_1 f_1} \Rightarrow f_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} f_1$$

transmisyjna płytka strefowa Fresnela, 3



Lokalnie traktujemy płytkę strefową Fresnela jak siatkę dyfrakcyjną, która ugina światło tak, że trafia ono do ogniska. Aby tak było stała siatki dyfrakcyjnej musi spełniać r-nie

$$d = q_{m+2} - q_m = \sqrt{(m+2)\lambda f} - \sqrt{m\lambda f}$$

$$= \sqrt{\lambda f} (\sqrt{m+2} - \sqrt{m}) = \sqrt{\lambda f} \sqrt{m} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{m}} - 1 \right) \cong \sqrt{\frac{\lambda f}{m}}$$

wzór siatkowy w przybliżeniu przyosiowym: $\sin \beta_l \cong \beta_l = l \frac{\lambda}{d}, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$z_1 \cong \frac{q_m}{\beta_1} = \frac{\sqrt{m\lambda f}}{\lambda} \sqrt{\frac{\lambda f}{m}} = f$$

$$z_l = \frac{f}{l}, l = 3, 5, 7, \dots$$

ogniska tylko dla nieparzystych l . Zastanów się dlaczego.

