

Podstawy Fizyki IV

Optyka z elementami fizyki współczesnej

wykład 17, 01.12.2017

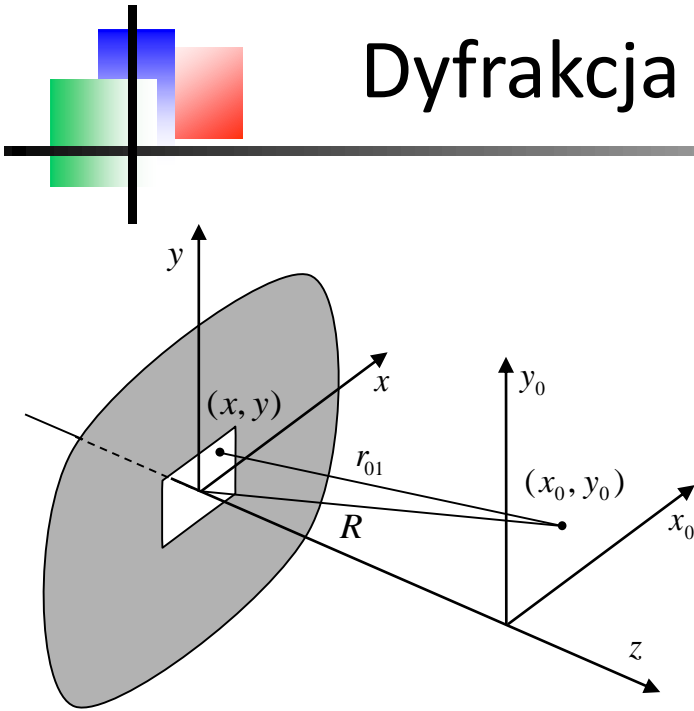
wykład:	Czesław Radzewicz
pokazy:	Mateusz Winkowski, Łukasz Zinkiewicz
ćwiczenia:	Radosław Łapkiewicz



Wykład 16 - przypomnienie

- dyfrakcja Fresnela – obrazek strefowy
- dyfrakcja Fresnela – obrazek sub-strefowy
- całki Fresnela i spirala Cornu

Dyfrakcja Fraunhofer = trans. Fouriera



dla obrazu Fraunhofera

$$E(x_0, y_0, z) = C \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy E(x, y, 0) e^{ikr_{10}}$$

Ponieważ

$$r_{01} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2}$$

to definiując R jako

$$R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z^2}$$

mamy

$$\begin{aligned} r_{01} &= R \sqrt{1 + (x^2 + y^2)/R^2 - 2(xx_0 + yy_0)/R^2} \\ &\cong R \sqrt{1 - 2(xx_0 + yy_0)/R^2} \\ &\cong R - (xx_0 + yy_0)/R \end{aligned}$$

dla $(x^2 + y^2) \ll R^2$

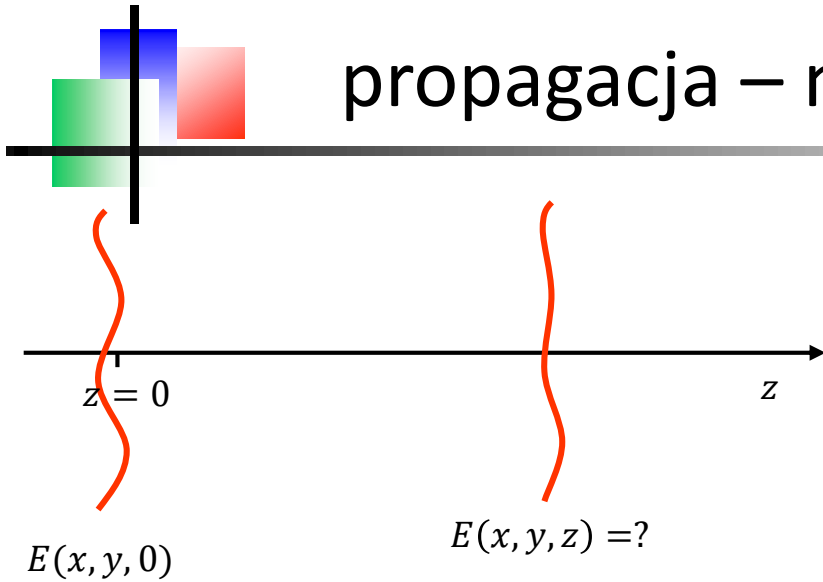
ostatecznie

$$\begin{aligned} E(x_0, y_0, z) &\cong C' e^{ikR} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y, 0) e^{-ik(xx_0 + yy_0)/R} dy \\ &= C' e^{ikR} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y, 0) e^{-i(k\frac{x_0}{R}x + k\frac{y_0}{R}y)} dy \\ &= C'' \mathcal{F}[E(x, y, 0)] \left(k \frac{x_0}{R}, k \frac{y_0}{R} \right) \end{aligned}$$

dwuwymiarowa transformata
Fouriera

w dalekim polu obserwujemy
transformatę Fouriera pola na przesłonie

propagacja – metoda spektralna



Dla fali monochromatycznej o skończonych rozmiarach poprzecznych, w $z = 0$ zawsze potrafimy zapisać pole elektryczne fali jako superpozycję fal płaskich

$$E(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \tilde{E}(k_x, k_y, 0) e^{i(k_x x + k_y y)}$$

przy czym, amplitudy fal płaskich liczymy z transformaty Fouriera pola w płaszczyźnie $z = 0$

$$\tilde{E}(k_x, k_y, 0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dx dy E(x, y, 0) e^{-i(k_x x + k_y y)}$$

Analogicznie

$$E(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \tilde{E}(k_x, k_y, z) e^{i(k_x x + k_y y)}$$

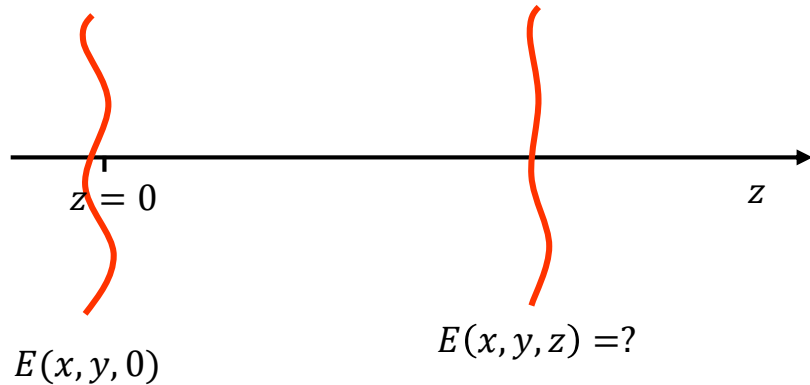
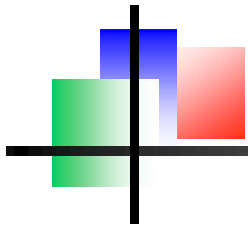
ze współczynnikami

$$\tilde{E}(k_x, k_y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dx dy E(x, y, z) e^{-i(k_x x + k_y y)}$$

Pole $E(x, y, z)$ musi spełniać r-nie Helmholtza $(\Delta + k^2)E(x, y, z) = 0$. Wstawiamy pole w postaci całki do tego r-nia, zamieniamy kolejność całkowania i różniczkowania

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \underbrace{\left[\frac{d^2}{dz^2} \tilde{E}(k_x, k_y, z) + (k^2 - k_x^2 - k_y^2) \tilde{E}(k_x, k_y, z) \right]}_{= 0} e^{i(k_x x + k_y y)} = 0$$

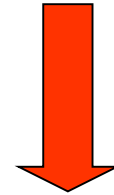
propagacja, 2



$$\frac{d^2}{dz^2} \tilde{E}(k_x, k_y, z) + (k^2 - k_x^2 - k_y^2) \tilde{E}(k_x, k_y, z) = 0$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \tilde{E}(k_x, k_y, z) + \mu^2 \tilde{E}(k_x, k_y, z) = 0$$

$$\mu = \pm \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = k_z$$



$$\tilde{E}(k_x, k_y, z) = \tilde{E}(k_x, k_y, 0) e^{i\mu z}$$

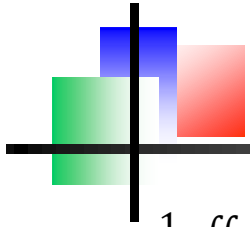
- $k^2 - k_x^2 - k_y^2 > 0$ $\tilde{E}(k_x, k_y, z) = \tilde{E}(k_x, k_y, 0) e^{ik_z z}$ fale propagujące się
- $k^2 - k_x^2 - k_y^2 < 0$ $\tilde{E}(k_x, k_y, 0) e^{-\mu z}$ fale zanikające
(ewanescentyjne)

Jeśli tylko $z \gg \lambda$ to możemy zaniedbać wkład od fal zanikających i mamy

$$E(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{k_x^2 + k_y^2 \leq k^2} dk_x dk_y \tilde{E}(k_x, k_y, 0) e^{i(k_x x + k_y y)} e^{iz \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}}$$

kompletny dokładny przepis -
bardzo szybkie
metody numeryczne

Propagacja - proste wnioski



$$E(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{k_x^2 + k_y^2 \leq k^2} dk_x dk_y \tilde{E}(k_x, k_y, 0) e^{i(k_x x + k_y y)} e^{iz \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}}$$

Niezbyt bliskie pole (obraz Fresnela)

$$k_x^2 + k_y^2 \ll k^2 \rightarrow k_z \cong k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}$$



$$E(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} e^{ikz} \iint dk_x dk_y \tilde{E}(k_x, k_y, 0) e^{i(k_x x + k_y y)} e^{-iz \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}}$$

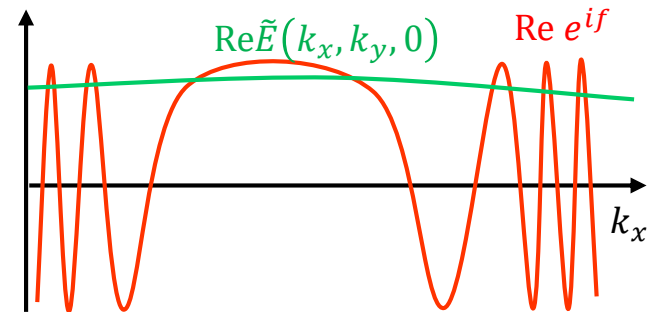
Oznaczmy: $f(k_x) = k_x x - \frac{k_x^2 z}{2k}$, $g(k_y) = k_y y - \frac{k_y^2 z}{2k}$

Mamy wtedy

$$E(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} e^{ikz} \iint dk_x dk_y \tilde{E}(k_x, k_y, 0) e^{if(k_x)} e^{ig(k_y)}$$

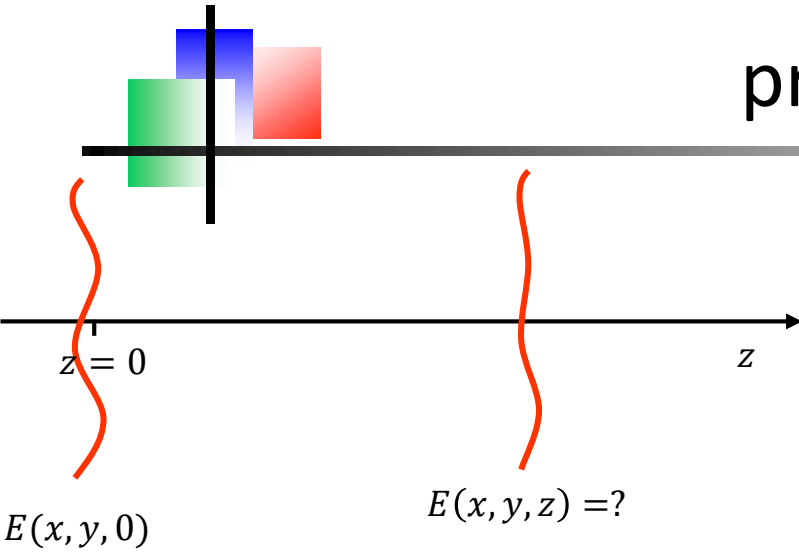
Jeśli funkcja $\tilde{E}(k_x, k_y, 0)$ jest wolnozmienna to wkład do całki pochodzi tylko z obszarów gdzie funkcje f i g mają zerowe pochodne bo wszędzie indziej wykładniki tych funkcji oscylują bardzo szybko wokół zera. Zerowe pochodne funkcji f i g dają:

$$k_x = k \frac{x}{z}, k_y = k \frac{y}{z}$$



punkt stacjonarny fazy – zasada Fermata

propagacja, 3



Rozważamy tylko fale propagujące się ze skończonym rozkładem składowych poprzecznych wektora falowego skupionym wokół zera – wiązka rozchodzi się głównie w kierunku z – możemy wtedy całkować k_x i k_y nie po kole ale całej płaszczyźnie

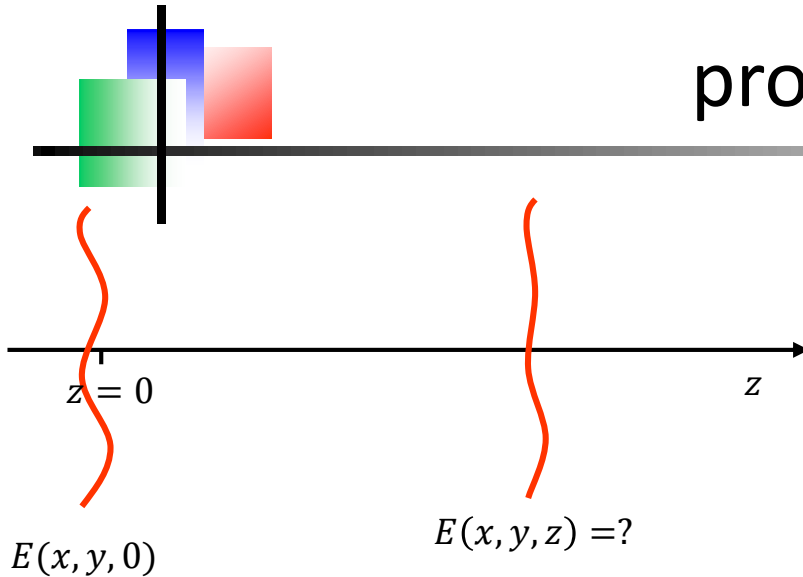
$$E(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \tilde{E}(k_x, k_y, 0) e^{i(k_x x + k_y y)} e^{iz \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}}$$

Do r-nia powyżej wstawiamy

$$\tilde{E}(k_x, k_y, 0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E(x', y', 0) e^{-i(k_x x' + k_y y')}$$

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y e^{i(k_x x + k_y y)} e^{iz \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E(x', y', 0) e^{-i(k_x x' + k_y y')} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E(x', y', 0) \underbrace{\iint_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y')]}}_{h(x-x', y-y', z)} e^{iz \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E(x', y', 0) h(x-x', y-y', z) \end{aligned}$$

propagacja, 4



Propagacja jest przykładem zagadnienia liniowego w 2 wymiarach:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E(x', y', 0) h(x - x', y - y', z)$$

$h(x - x', y - y', z)$ - odpowiedź impulsowa układu

Dla źródła punktowego $E(x, y, 0) = \delta(x - x_p) \delta(y - y_p)$ (impulsu) mamy

$$E(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} h(x - x_p, y - y_p, z)$$

Matematycznie całka

$$E(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E(x', y', 0) h(x - x', y - y', z)$$

to splot funkcji $E(x', y', 0)$ oraz $h(x - x', y - y', z)$

$$E(x, y, z) = E(x, y, 0) * h(x - x', y - y', z)$$

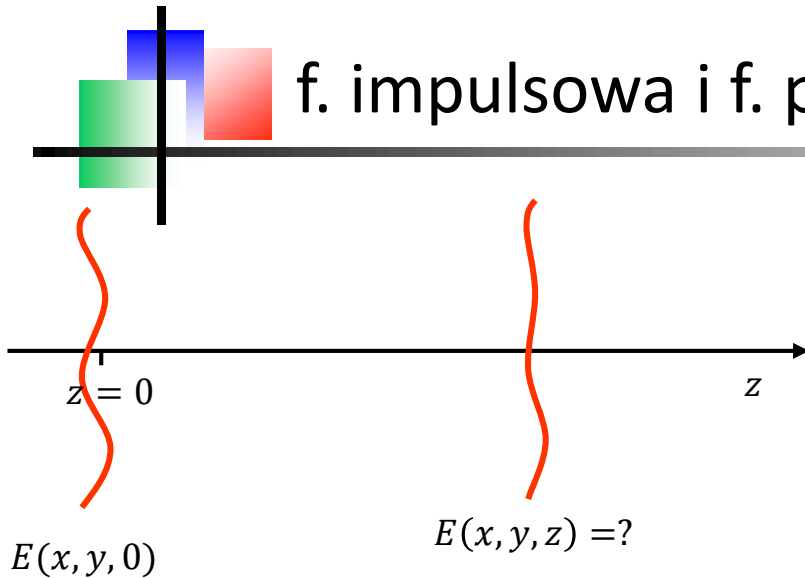
Wiadomo, że transformata Fouriera splotu to iloczyn transformat

$$\tilde{E}(k_x, k_y, z) = \tilde{E}(k_x, k_y, 0) \tilde{h}(k_x, k_y, z)$$

gdzie funkcja $\tilde{h}(k_x, k_y, z)$ nazywana (amplitudową) funkcją przenoszenia jest transformatą Fouriera funkcji odpowiedzi impulsowej

$$\tilde{h} = \mathcal{F}[h] = e^{iz\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}}$$

f. impulsowa i f. przenoszenia w przybliż. Fresnela



Jeśli rozważane pole jest mało rozbieżne: $k_x^2, k_y^2 \ll k^2$ to

$$\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \cong k - (k_x^2 + k_y^2)/2k$$

i funkcja przenoszenia ma postać

$$\tilde{h}(k_x, k_y, z) = e^{\left[ikz - i \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} z \right]}$$

Korzystamy z faktu, że funkcje h oraz \tilde{h} to para sprzężona fourierowsko aby policzyć funkcję odpowiedzi impulsowej. Rachunki...

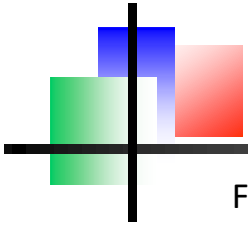
$$h(x, y, z) = \frac{i}{\lambda z} e^{ik \left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \right)}$$

Teraz możemy już wypisać pole $E(x, y, z)$ w obrazie Fresnela

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E(x', y', 0) h(x - x', y - y', z) \\ &= \frac{i}{\lambda z} e^{ikz} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E(x', y', 0) e^{\frac{ik}{2z} [(x-x')^2 + (y-y')^2]} \end{aligned}$$

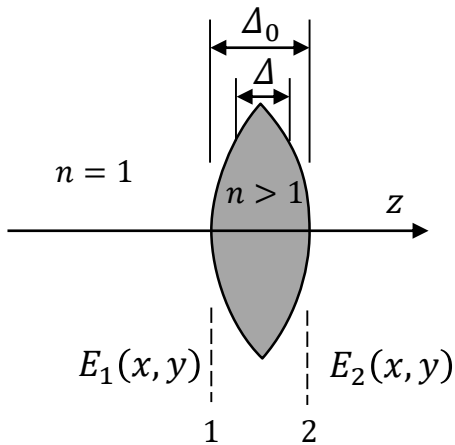
Wynik identyczny jak ten podany w wykładzie 16. i wyprowadzony z całki Sommerfelda

ogólny opis układów liniowych 2D np., układów obrazujących w języku odpowiedzi impulsowej oraz funkcji przenoszenia



funkcja przenoszenia cienkiej soczewki

Funkcję impulsową i funkcję przenoszenia możemy zdefiniować także dla układów optycznych. Przykład: cienka soczewka



Cienka oznacza tutaj, że promienie świetlne nie zmieniają odległości od osi przy przejściu przez soczewkę. Wtedy jedynym efektem działania soczewki jest zmiana fazy fali zależna od położenia czyli x oraz y : $\varphi(x, y)$

$$\varphi(x, y) = k\Delta_0 + (n - 1)k\Delta(x, y)$$

Rachunki zrobimy dla soczewki płasko-wypukłej

$$\Delta(x, y) = \Delta_0 - R + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

dla $x^2, y^2 \ll R^2$ mamy

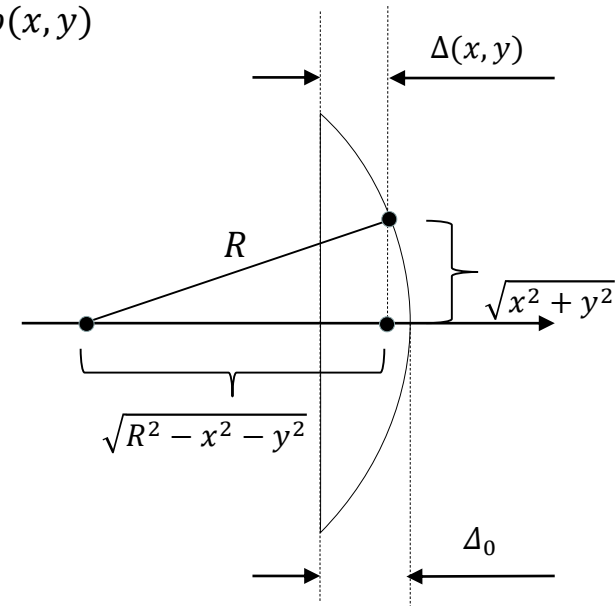
$$\Delta(x, y) \cong \Delta_0 - (x^2 + y^2)/2R$$

i

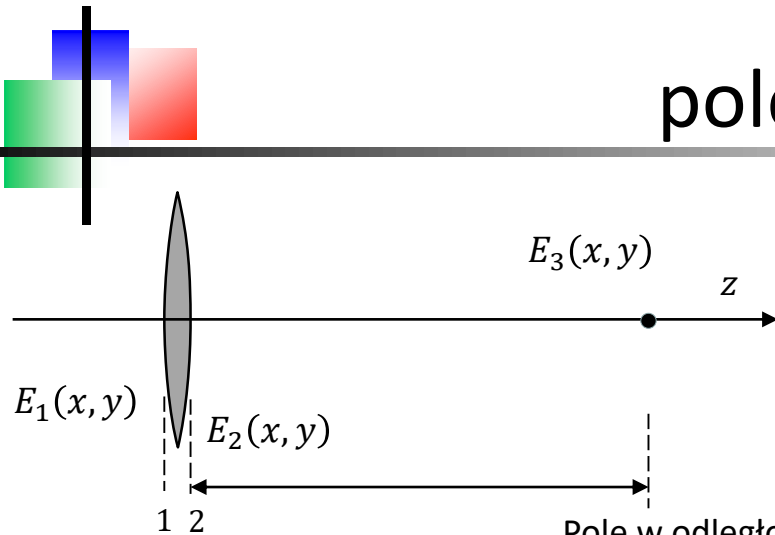
$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= -(n - 1)k(x^2 + y^2)/2R \\ &= -k(x^2 + y^2)/2f \end{aligned}$$

Wynik końcowy nie zależy od kształtu soczewki tak długo jak długo obowiązuje przybliżenie cienkiej soczewki

$$E_2(x, y) = E_1(x, y)e^{-ik(x^2 + y^2)/2f}$$



pole za soczewką



Zakładamy cieniłą soczewkę, dla której
 $E_2(x, y) = E_1(x, y)e^{-ik(x^2+y^2)/2f}$

Pole w odległości z za soczewką liczymy w przybliżeniu Fresnela

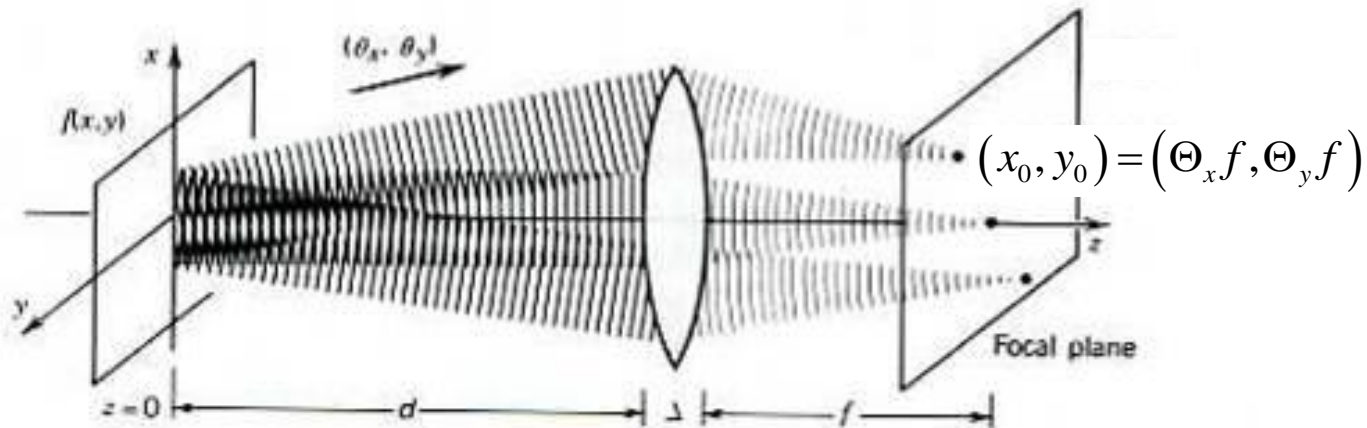
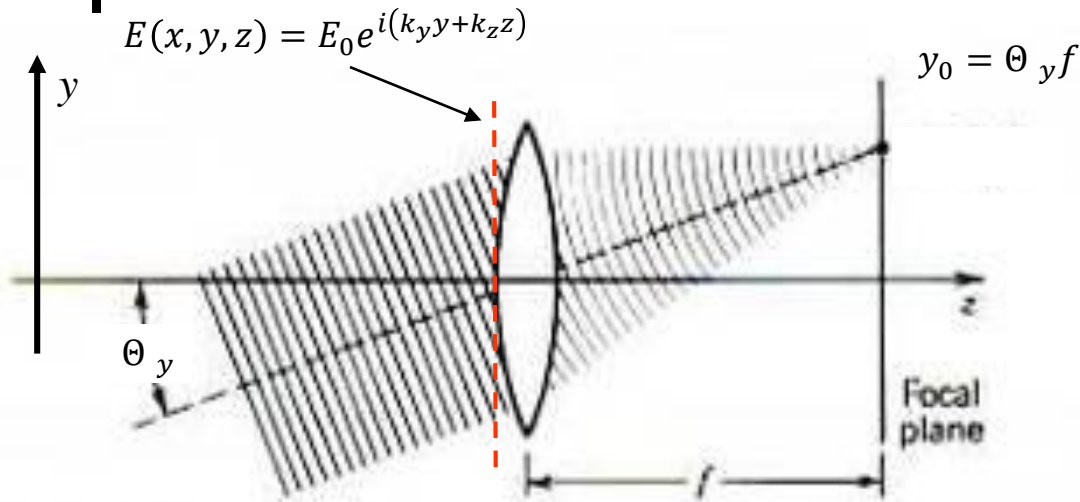
$$\begin{aligned} E_3(x, y, z) &= \frac{i}{\lambda z} e^{ikz} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E_2(x', y', 0) e^{\frac{ik}{2z}[(x-x')^2+(y-y')^2]} \\ &= \frac{i}{\lambda z} e^{ikz} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E_1(x', y') e^{-\frac{ik}{2f}(x'^2+y'^2)} e^{\frac{ik}{2z}[(x-x')^2+(y-y')^2]} \\ &= \frac{i}{\lambda z} e^{ik\left(z+\frac{x^2+y^2}{2z}\right)} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E_1(x', y') e^{\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{f}\right)(x'^2+y'^2)} e^{-\frac{ik}{z}(xx'+yy')} \end{aligned}$$

Jeśli $z = f$ to

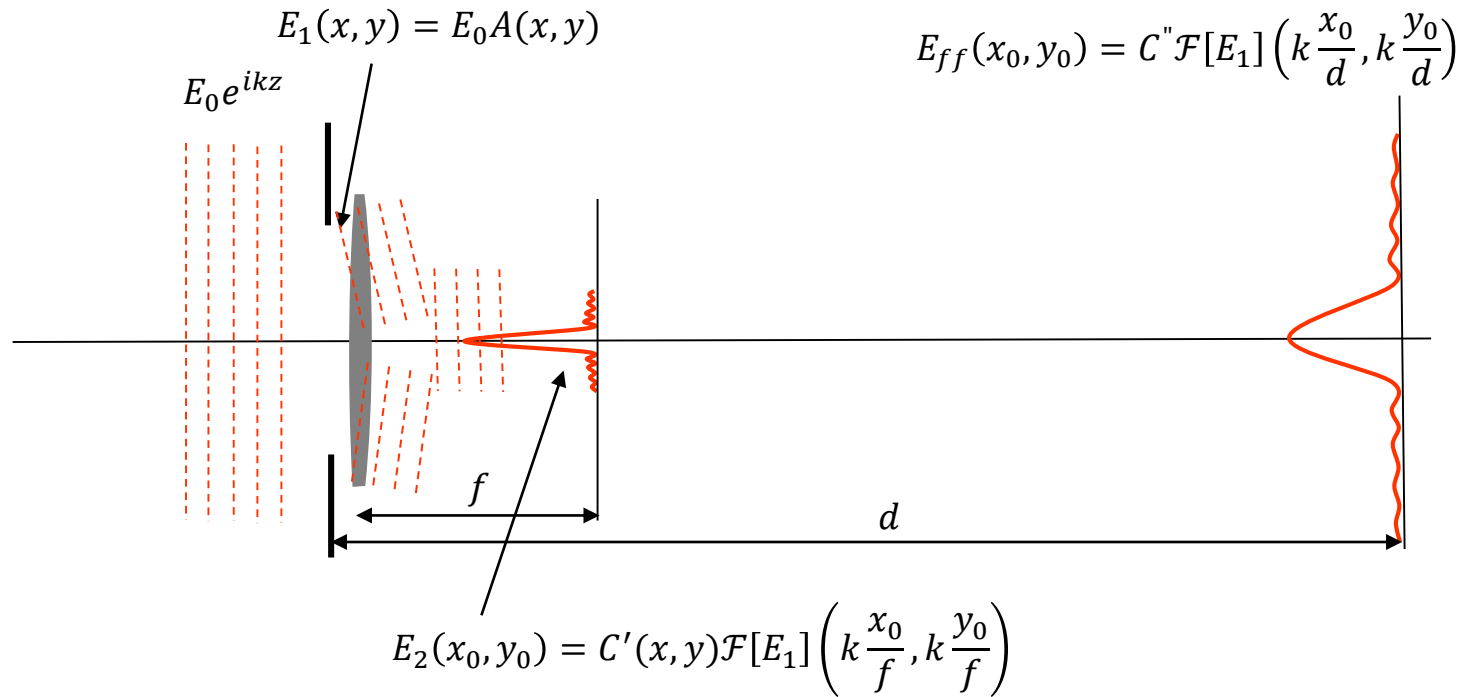
$$\begin{aligned} E_3(x, y, f) &= \frac{i2\pi}{\lambda f} e^{ik\left(f+\frac{x^2+y^2}{2f}\right)} \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E_1(x', y') e^{-\frac{ik}{f}(xx'+yy')} \\ &= \frac{i2\pi}{\lambda f} e^{ik\left(f+\frac{x^2+y^2}{2f}\right)} \tilde{E}_1\left(k\frac{x}{f}, k\frac{y}{f}\right) \end{aligned}$$

$I_3(x, y, z) = |E_3(x, y, z)|^2 \propto \left| \tilde{E}_1\left(k\frac{x}{f}, k\frac{y}{f}\right) \right|^2$ - kształt rozkładu natężenia w płaszczyźnie ogniskowej jest taki jak w dalekim polu

Soczewka i fala płaska



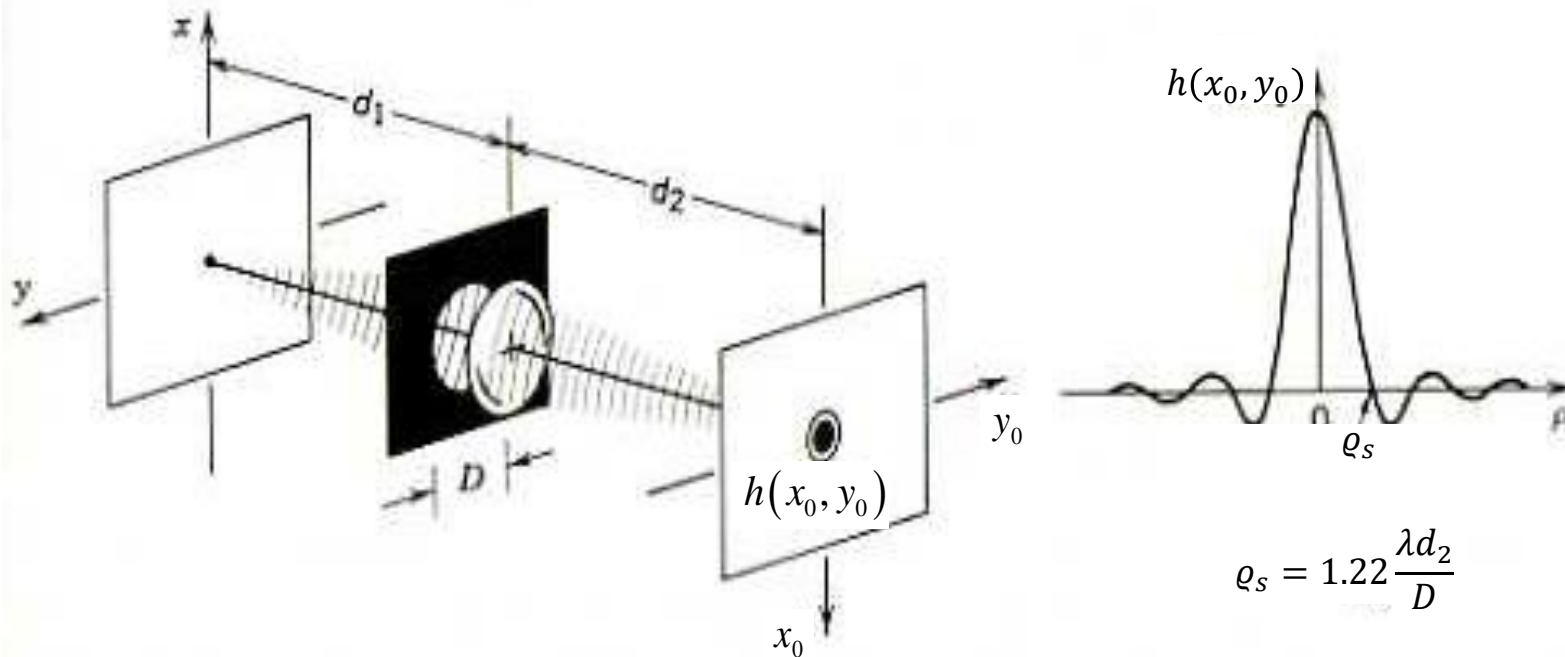
fala płaska i soczewka o skończonej aperturze



W płaszczyźnie Fouriera natężenie jest (z dokładnością do czynnika skalującego) takie samo jak w strefie dalekiego pola (oba rozkłady mają ten sam kształt)

Rozmiary ogniska

Funkcja odpowiedzi impulsowej dla układu obrazującego z pojedynczą soczewką

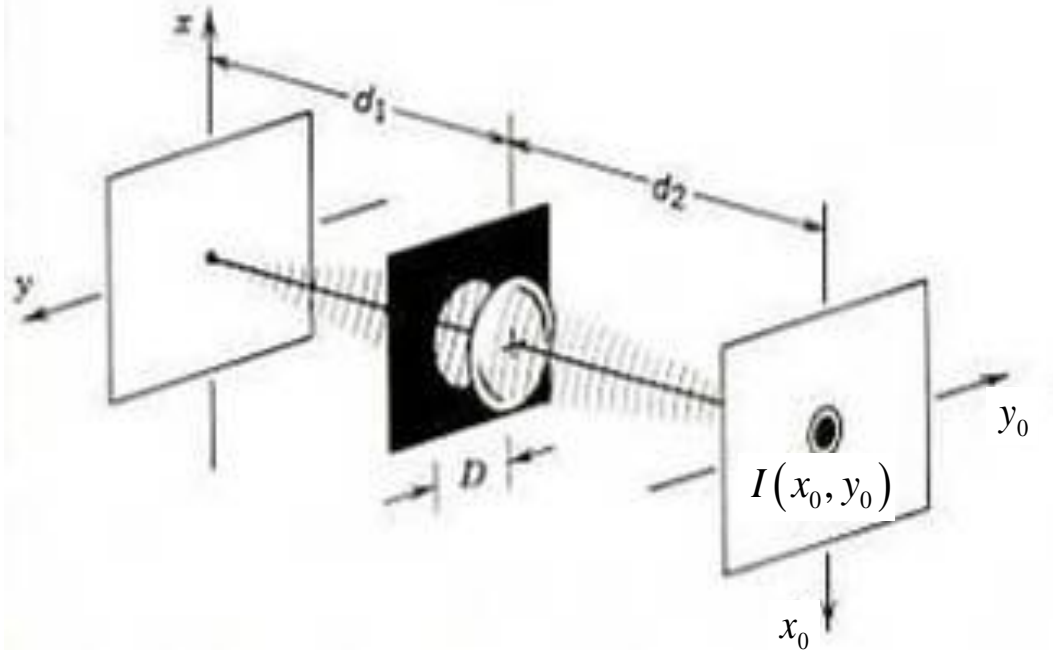


$$h(x_0, y_0) = C \frac{J_1\left(\frac{\pi D \rho}{\lambda d_2}\right)}{\frac{\pi D \rho}{\lambda d_2}}, \quad \rho = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

Jeżeli $d_1 = \infty$ (wiązka skolimowana) to $d_2 = f$ i:

$$h(x_0, y_0) = C \frac{J_1\left(\frac{\pi D \rho}{\lambda f}\right)}{\frac{\pi D \rho}{\lambda f}}$$

Dyfrakcyjne ograniczenie na rozdzielczość

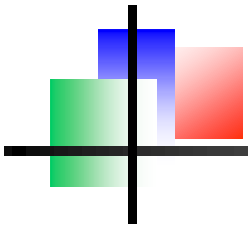


$$I(x_0, y_0) = C \frac{J_1^2\left(\frac{\pi D \varrho}{\lambda d_2}\right)}{\left(\frac{\pi D \varrho}{\lambda d_2}\right)^2}$$

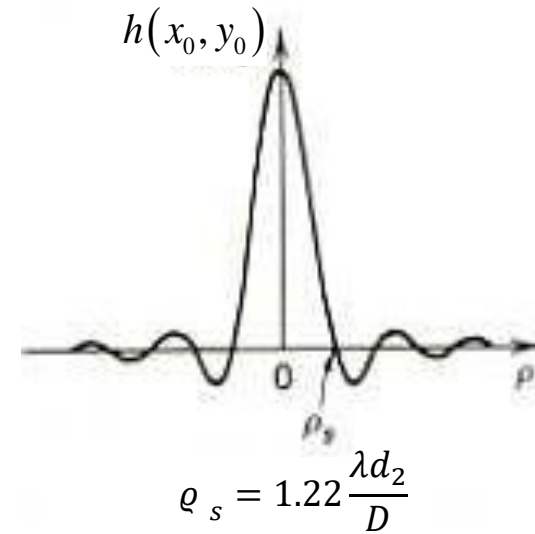
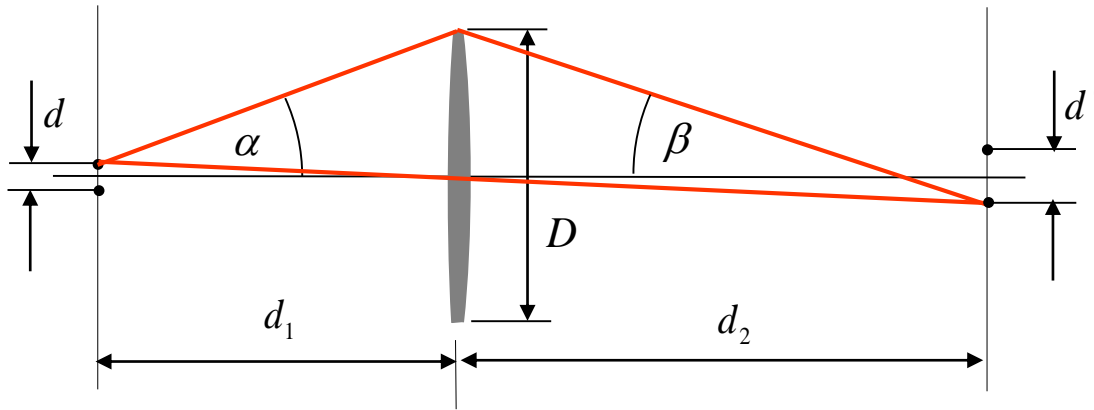
$$\varrho_s = 1.22 \frac{\lambda d_2}{D}$$

Rozdzielczość rośnie z liczbą $f^\# = \frac{D}{d_2}$

Układy o dużej jasności mają dobrą rozdzielczość
Uwaga: **aberracje**



Rozdzielczość obrazowania



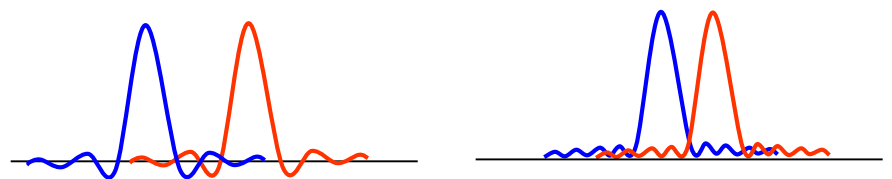
Kryterium Rayleigha:
maksimum jednego rozkładu
przypada na pierwsze zero drugiego

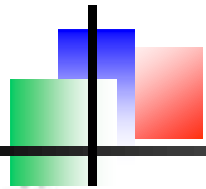
$$d' = \rho_s = 1.22 \frac{\lambda d_2}{D}$$

ale

$$d = \frac{d_1}{d_2} d' = 1.22 \frac{\lambda d_1}{D}$$

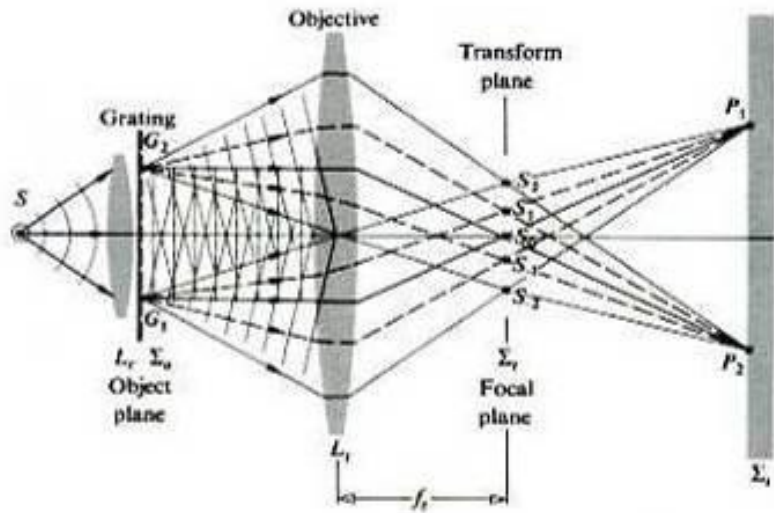
obrazowanie spójne vs niespójne



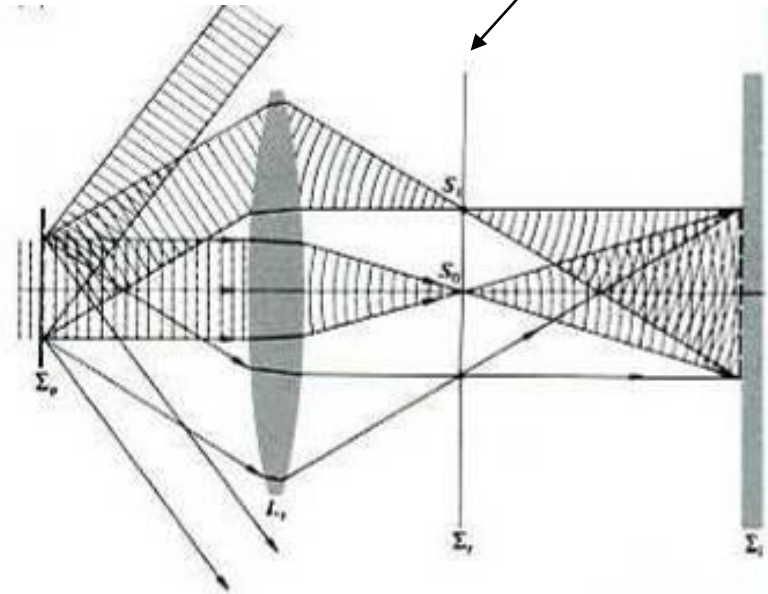


rozdzielczość układu obraz. wg. Abbego

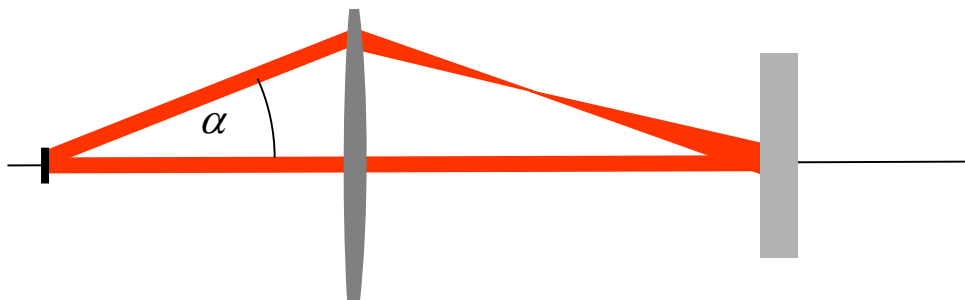
płaszczyzna Fraunhofera



obrazowanie



filtrowanie



minimum: na soczewce mieszczą się przynajmniej rzędy 1-,0,1.

r-nie siatki dyfrakcyjnej:

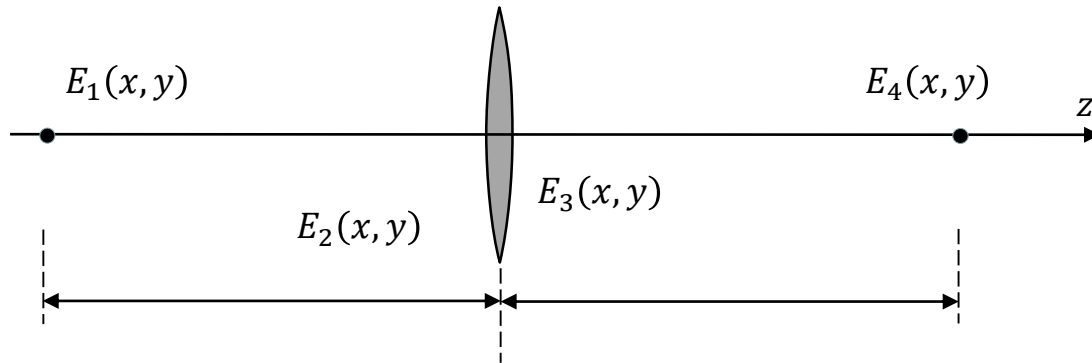
$$\sin \alpha + \sin \beta = l \frac{\lambda}{nd}$$

ale $\beta = 0$

zatem

$$d = \frac{\lambda}{nd} = \frac{\lambda}{NA}$$

soczewka jako transformator Fouriera



Zakładamy cienką soczewkę; liczymy po kolei pola: przed soczewką, za soczewką, w płaszczyźnie ogniskowej.

Rachunki są takie jak dla robiliśmy wcześniej - tylko dużo bardziej żmudne. Wynik:

$$E_4(x_0, y_0) = C' \mathcal{F}[E_1] \left(k \frac{x_0}{f}, k \frac{y_0}{f} \right)$$

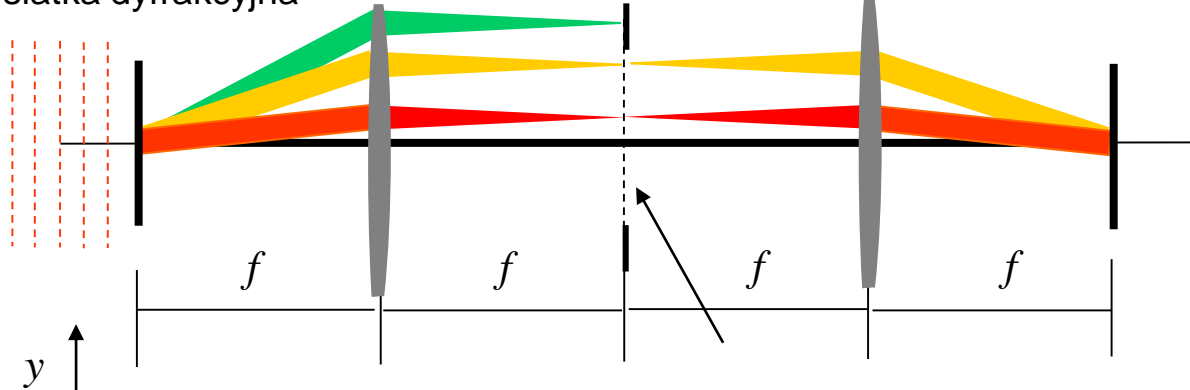
Rozkład pola w tylnej płaszczyźnie ogniskowej jest proporcjonalny do transformaty Fouriera pola w przedniej płaszczyźnie ogniskowej

układ 4f - filtrowanie przestrzenne

Prostokątna fazowa
siatka dyfrakcyjna

regulowana
przesłona

Obraz ilustruje sytuację, dla której obraz
powstaje z ugięcia fal na 2 składowych
fourierowskich siatki: $l = 1, 3$



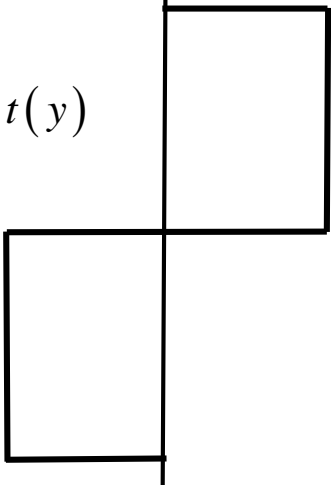
Obraz (pomarańczowa krzywa)
nie jest ostry.

$$E_2(x_0, y_0) = C' \mathcal{F}[E_1] \left(k \frac{x_0}{f}, k \frac{y_0}{f} \right)$$

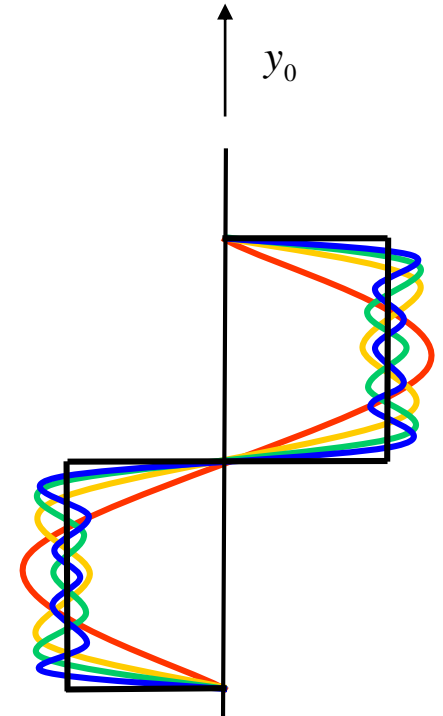
$$t(y) = \sum_{l=1,3,5,\dots} \frac{1}{l} \sin l \frac{2\pi y}{d}$$

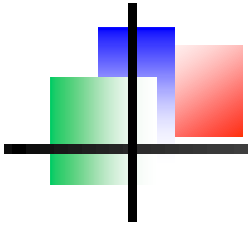
d - stała siatki

$t(y)$



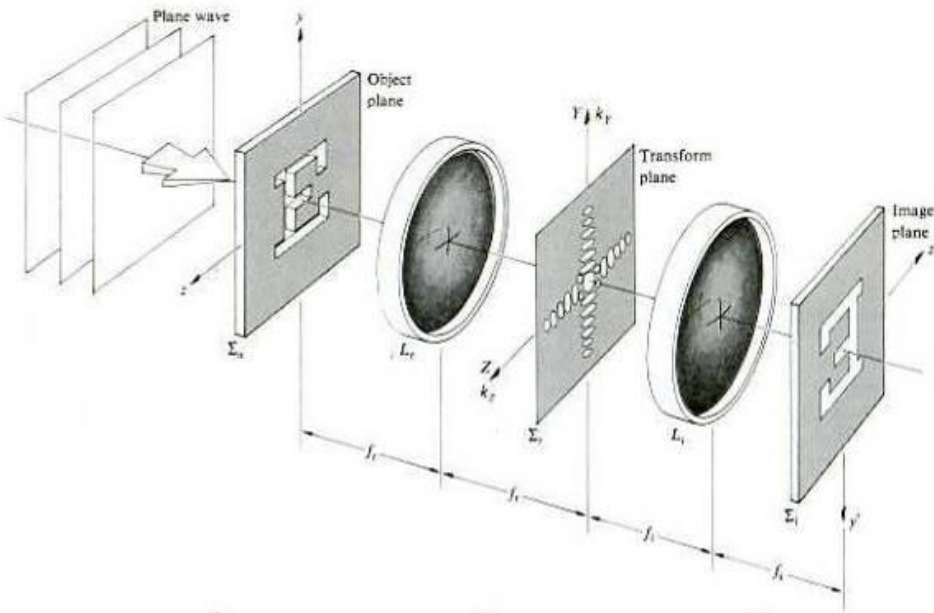
y_0



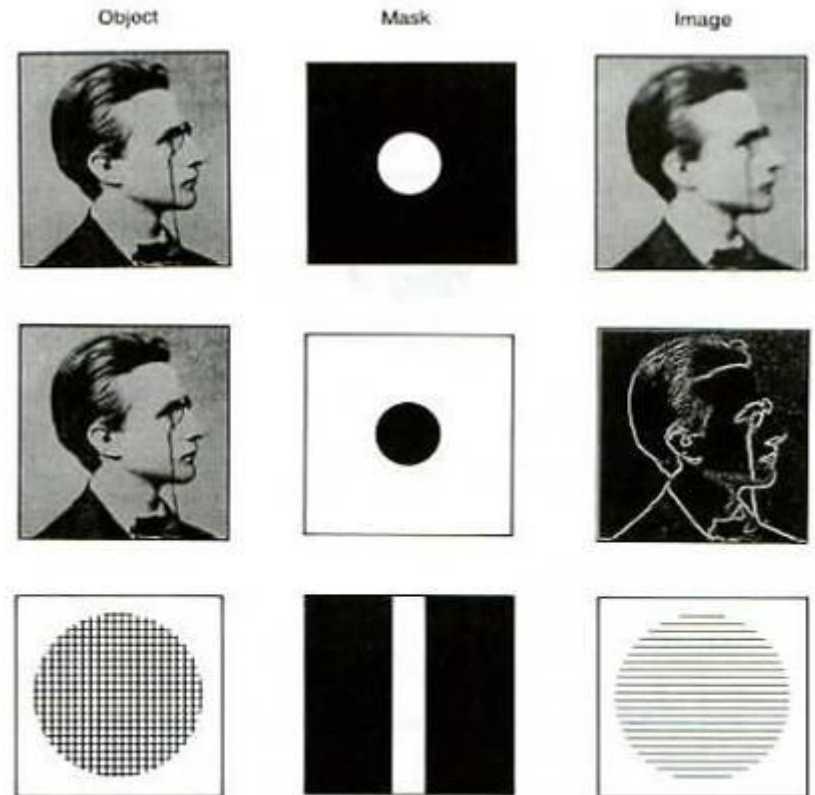


układ 4f – obróbka i rozpoznawanie obrazów

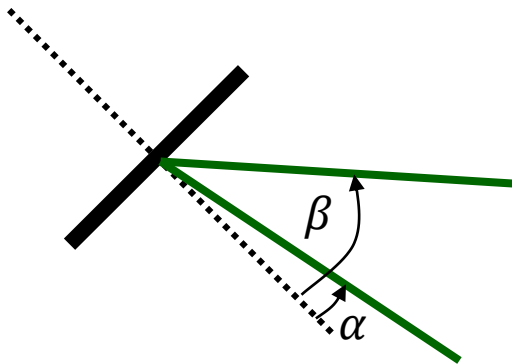
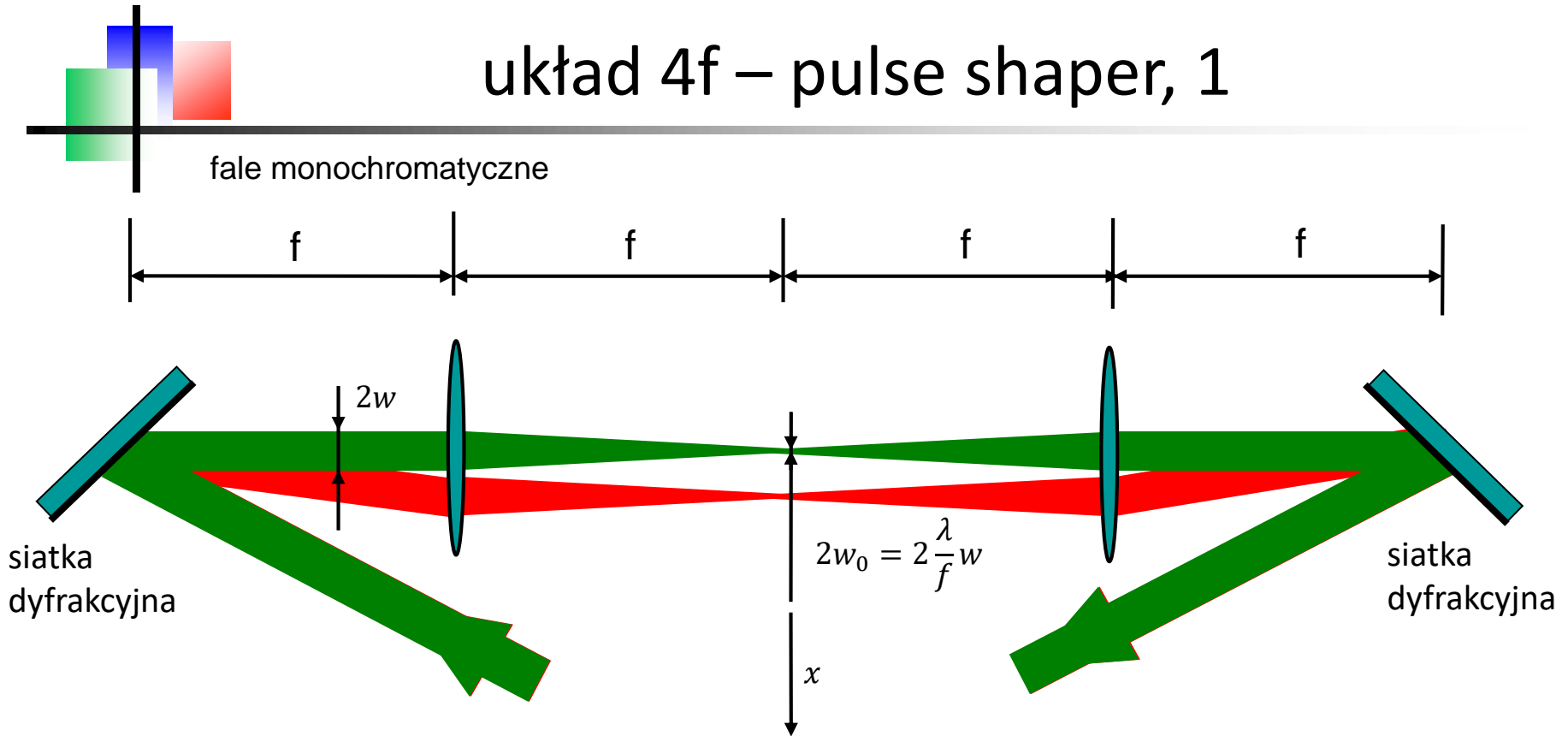
Duże częstotliwości przestrzenne – wysokie składowe fourierowskie



maski - modulatory ciekłokrystaliczne



układ 4f – pulse shaper, 1



$$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\lambda}{d}$$

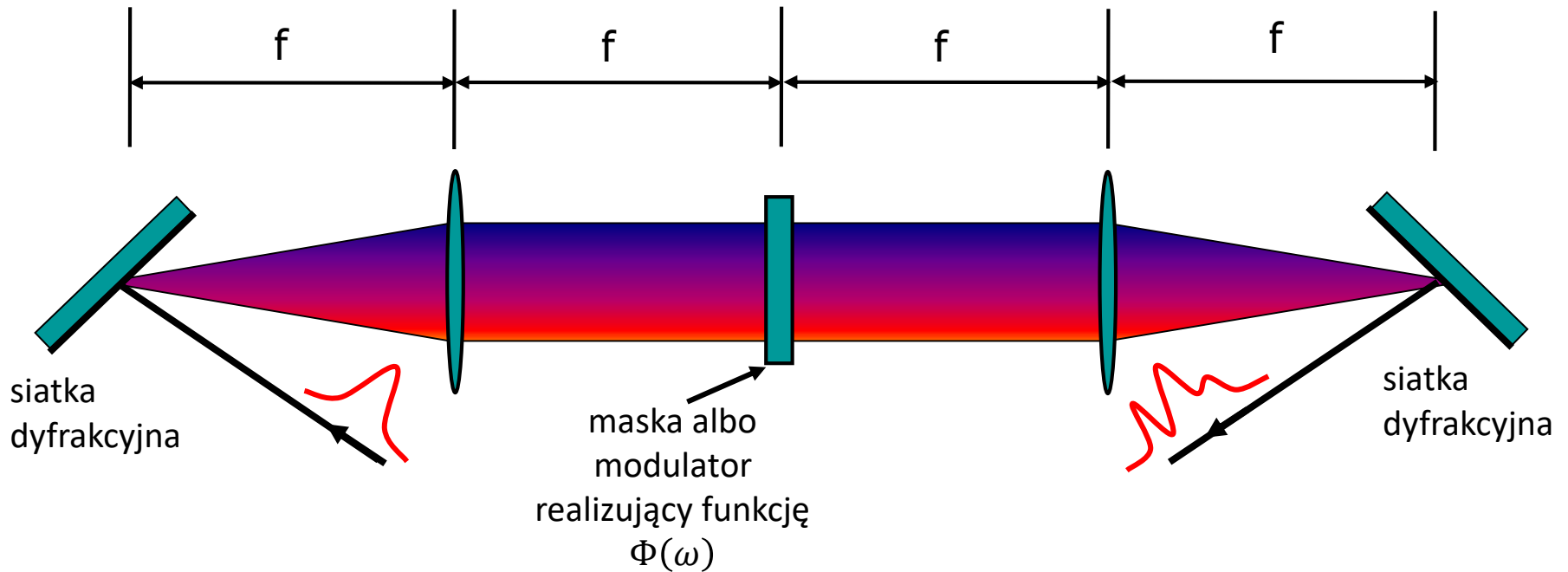
$$\frac{dx}{d\lambda} = f \frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{d}{d \cos \beta}$$

rozdzielczość spektralna

$$\Delta\lambda = 2w_0 \cdot \frac{dx}{d\lambda}$$

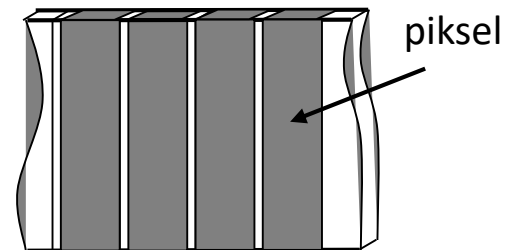
układ 4f – pulse shaper, 2

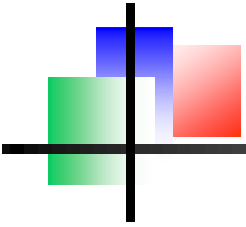
Impulsy femtosekundowe



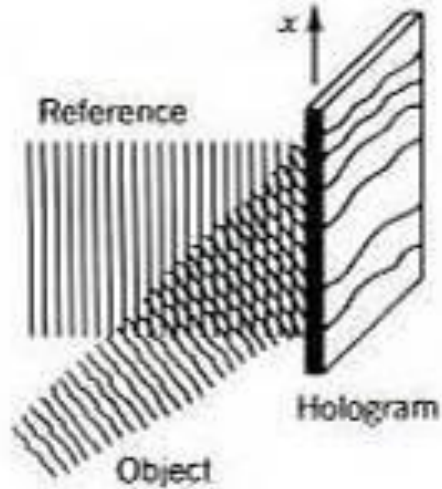
$$E_{out}(\omega) = e^{i\Phi(\omega)} E_{in}(\omega)$$

przestrzenny modulator światła
(ciekły kryształ)





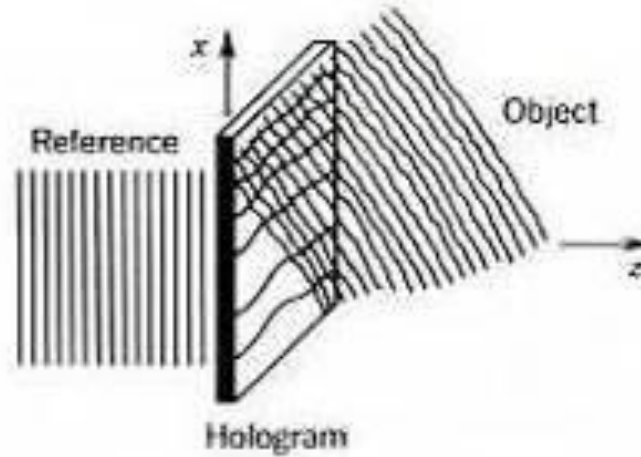
Holografia, 1



REJESTRACJA

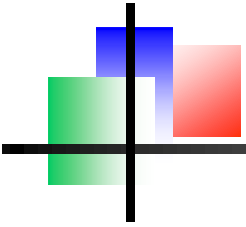
Naświetlamy film drobnoziarnisty tak, że jego transmisja T jest proporcjonalna do natężenia światła

$$t \propto |E_o + E_r|^2 = |E_o|^2 + |E_r|^2 + E_o E_r^* + E_o^* E_r$$



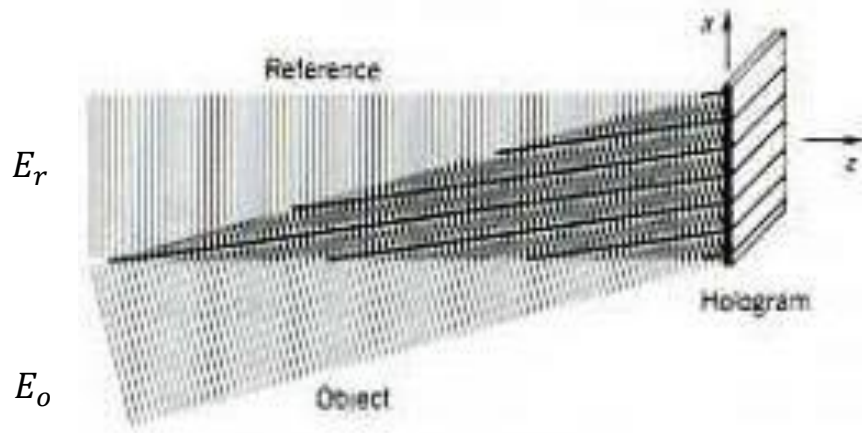
ODTWARZANIE

$$E = tE_r \propto |E_o|^2 E_r + |E_r|^2 E_r + |E_r|^2 E_o + E_r^2 E_o^*$$

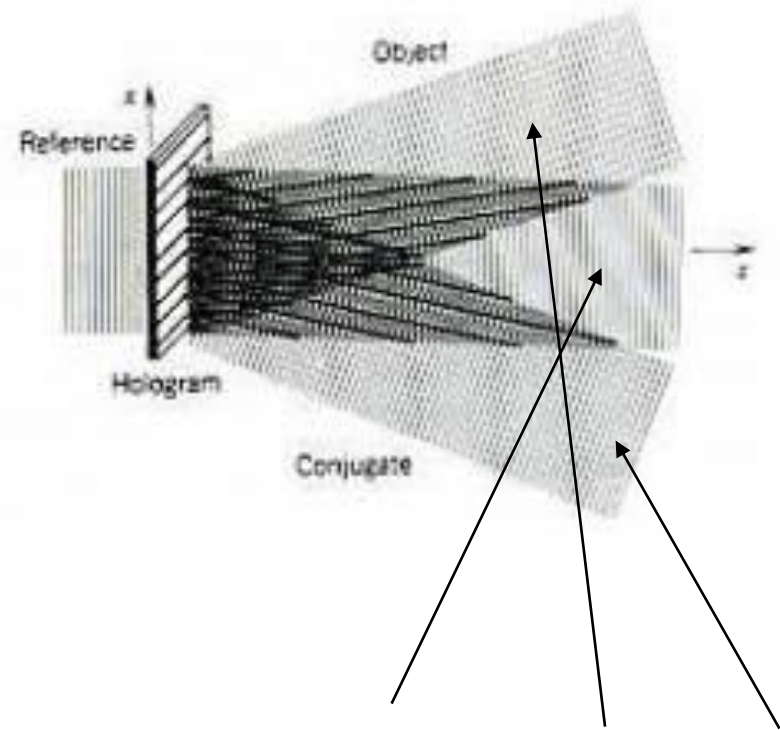


Holografia, 2

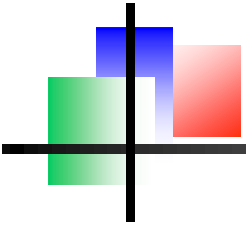
REJESTRACJA



ODTWARZANIE

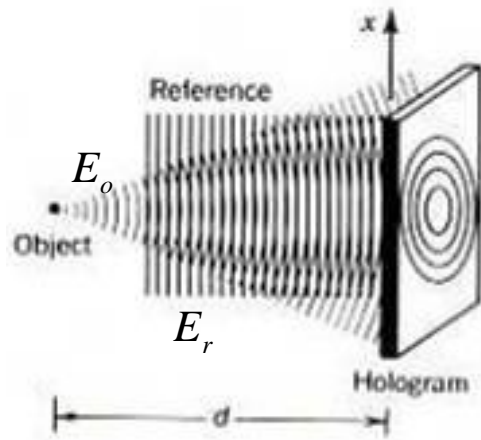


$$E = tE_r \propto (|E_o|^2 + |E_r|^2)E_r + |E_r|^2E_o + E_r^2E_o^*$$

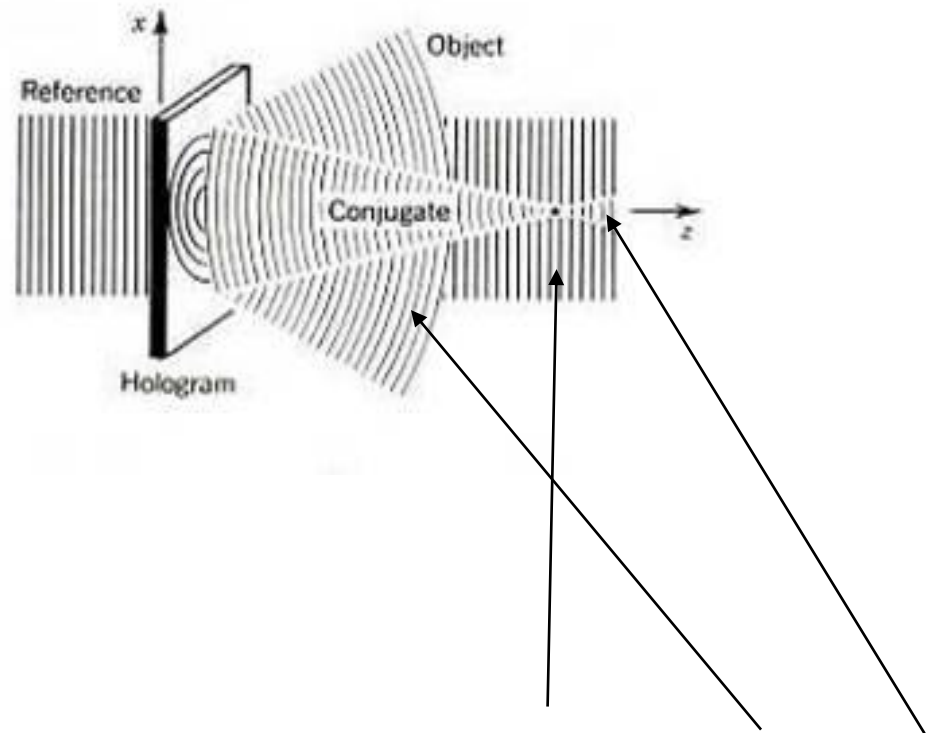


Holografia, 3

REJESTRACJA



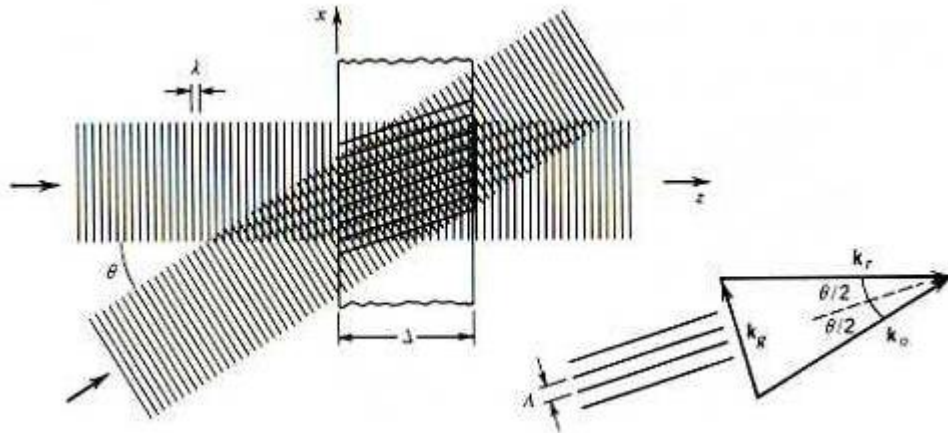
ODTWARZANIE



$$E = tE_r \propto (|E_o|^2 + |E_r|^2)E_r + |E_r|^2E_o + E_r^2E_o^*$$

Hologramy objętościowe

REJESTRACJA



$$\begin{aligned}
 I(x, y, z) &= \left| \sqrt{I_r} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} + \sqrt{I_o} e^{i\vec{k}_o \cdot \vec{r}} \right|^2 = \\
 &= I_r + I_o + \sqrt{I_r I_o} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \vec{k}_o \cdot \vec{r}) = \\
 &= I_r + I_o + \sqrt{I_r I_o} \cos(\vec{k}_g \cdot \vec{r})
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\vec{k}_g = \vec{k}_r - \vec{k}_o$$

ODTWARZANIE

