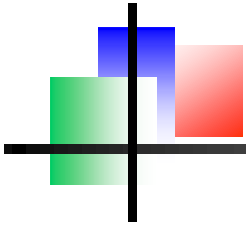


Podstawy Fizyki III

Optyka z elementami fizyki współczesnej

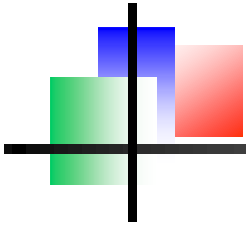
wykład 18, 07.12.2017

wykład:	Czesław Radzewicz
pokazy:	Mateusz Winkowski, Łukasz Zinkiewicz
ćwiczenia:	Radosław Łapkiewicz



Wykład 17 - przypomnienie

- dyfrakcja Frunhofer = transformata Fouriera pola na przesłonie
- propagacja jako zagadnienie fourierowskie
- funkcja odpowiedzi impulsowej, funkcja przenoszenia dla pustej przestrzeni
- dyfrakcyjne ograniczenie zdolności rozdzielczej w obrazowaniu
- filtrowanie częstości przestrzennych
- holografia



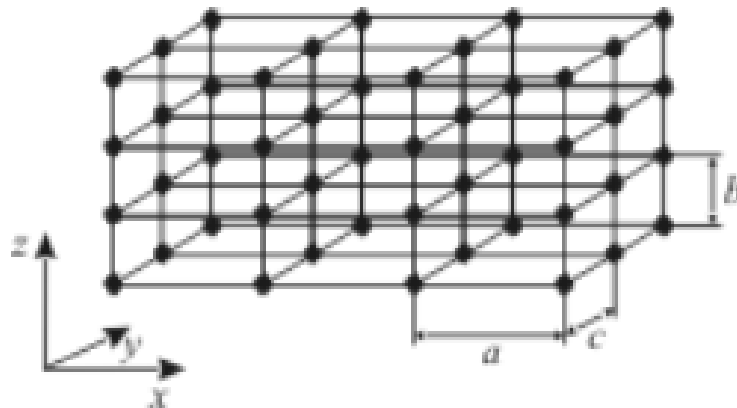
r-nia materiałowe – rewizyta, 1

przypomnienie:

r-nia materiałowe dla ośrodka izotropowego

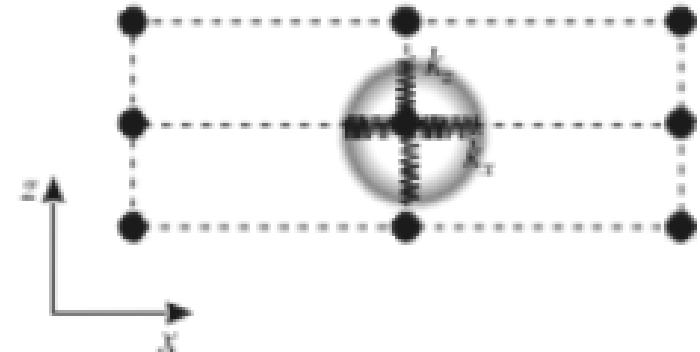
$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$



model Lorentza $\vec{F} = -k\vec{r}$

ośrodki anizotropowe



opis matematyczny ośr. anizotropowych:

$$\vec{D} = \hat{\epsilon} \epsilon_0 \vec{E}$$

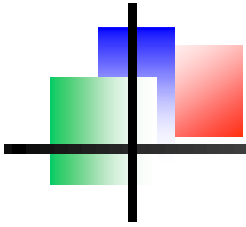
$$D_k = \epsilon_0 \hat{\epsilon}_{kl} E_l$$

tensor stałej dielektrycznej

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$$

jest symetryczny

$$\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$$



matematyka ośrodków dwójłomnych, 1

przypomnienie: dla ośr. izotropowych:
gęstość energii pola elektrycznego

$$u_E = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad [\text{J/m}^3]$$

przy czym $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

podobnie, dla ośr. anizotropowych, w laboratoryjnym układzie odniesienia (x', y', z') :

$$u_E = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\epsilon_{x'x'} E_{x'}^2 + \epsilon_{y'y'} E_{y'}^2 + \epsilon_{z'z'} E_{z'}^2 + 2\epsilon_{x'y'} E_{x'} E_{y'} + 2\epsilon_{x'z'} E_{x'} E_{z'} + 2\epsilon_{y'z'} E_{y'} E_{z'} \right)$$

kwadryga opisująca elipsoide

matematyka: przez obroty można znaleźć własny układ
odniesienia (x, y, z) taki, że

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 (\epsilon_x E_x^2 + \epsilon_y E_y^2 + \epsilon_z E_z^2)$$

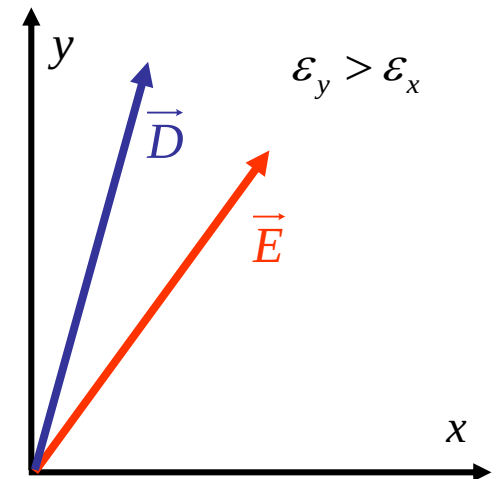
co daje prosty związek pomiędzy $\vec{E}$ i $\vec{D}$:

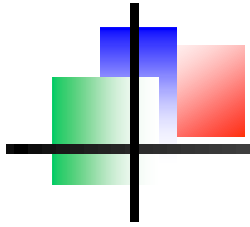
$$D_x = \epsilon_0 \epsilon_x E_x$$

$$D_y = \epsilon_0 \epsilon_y E_y$$

$$D_z = \epsilon_0 \epsilon_z E_z$$

wektory $\vec{E}$ i $\vec{D}$ nie muszą
być równoległe





matematyka ośrodków dwójłomnych, 2

r-nia Maxwella dla dielektryka

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (4)$$

przyjmijmy płaską falę
monochromatyczną:

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{H}(t, \vec{r}) = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{k} = k \hat{s}$$

gdzie $\hat{s}$ to wersor o kierunku
wektora falowego

plus r-nia materiałowe dla ośrodka anizotropowego

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \hat{\epsilon} \vec{E}$$

plus wektor Poyntinga

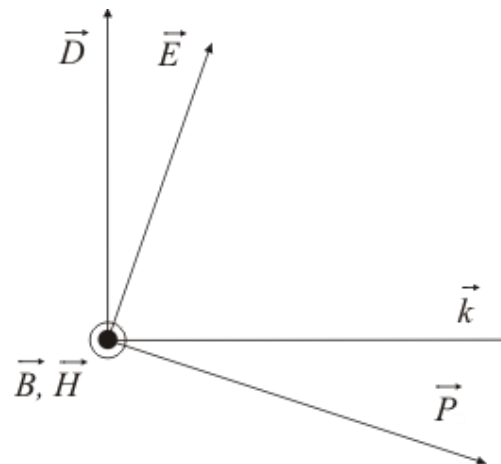
$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$$

dają

$$\vec{H} \times \hat{s} = \frac{c}{n} \vec{D}$$

+ rachunki $\Rightarrow$

$$\vec{E} \times \hat{s} = -\frac{c}{n} \vec{B}$$



$\vec{E}$ - pole elektr.

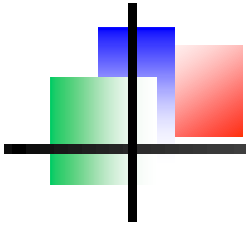
$\vec{D}$ - Przesunięcie diel.

$\vec{H}$ - pole magnet.

$\vec{B}$ - indukcja magnet.

$\vec{k}$ - wektor falowy

$\vec{P}$ - wektor Poyntinga



matematyka ośrodków dwójłomnych, 3

r-nia Maxwella dla dielektryka

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (4)$$

jeden wyróżniony kierunek – oś optyczna kierunek z

$$\Rightarrow \hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}$$

1. zakładamy płaskie fale monochromatyczne

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{H}(t, \vec{r}) = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

2. Fale rozchodzą się

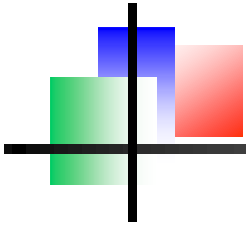
w płaszczyźnie $x - z$

$$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_z \hat{z}$$

dla pól $\vec{f}(t, \vec{r}) = \vec{E}(t, \vec{r}), \vec{H}(t, \vec{r})$ obowiązują proste reguły: $\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} = -i\omega \vec{f}, \nabla \times \vec{f} = i\vec{k} \times \vec{f}$

r-nia Maxwella + rachunki ... dają urocze równanie wektorowe:

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \hat{\epsilon} \cdot \vec{E}$$



matematyka ośrodków dwójłomnych, 4

równanie $\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \hat{\epsilon} \cdot \vec{E}$
rozpisane na współrzędne

wygląda tak:

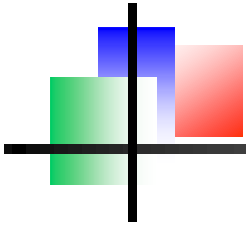
$$\begin{pmatrix} 0 & k_z & 0 \\ -k_z & 0 & k_x \\ 0 & -k_x & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

czyli

$$\begin{pmatrix} k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon & 0 & -k_x k_z \\ 0 & k_x^2 + k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon & 0 \\ -k_x k_z & 0 & k_x^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

i ma nietrywialne rozwiązania jeśli wyznacznik macierzy jest zerowy

$$(k_x^2 + k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon) [(k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon)(k_x^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_z) - k_x^2 k_z^2] = 0$$



matematyka ośrodków dwójłomnych, 5

$$(k_x^2 + k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon) [(k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon)(k_x^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_z) - k_x^2 k_z^2] = 0$$

Przypadek 1:

$$k_x^2 + k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon = 0$$

$$k_x^2 + k_z^2 = k^2 = \left(\frac{n\omega}{c}\right)^2, \quad n = \sqrt{\epsilon}$$

związek dyspersyjny taki sam jak dla ośrodków izotropowych
(współczynnik załamania nie zależy od kierunku $\vec{k}$)

wracamy do r-nia:

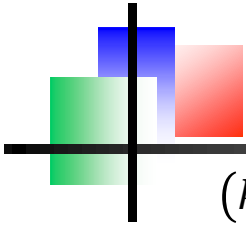
$$\begin{pmatrix} k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon & 0 & -k_x k_z \\ 0 & k_x^2 + k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon & 0 \\ -k_x k_z & 0 & k_x^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

żeby znaleźć wektory własne przy założeniu $k_x^2 + k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon = 0$.

Dostajemy $E_x = E_z = 0$

Fala jest spolaryzowana liniowo w kierunku y czyli prostopadle do płaszczyzny zawierającej oś optyczną (kierunek z) oraz wektor falowy (płaszczyzna x – z)

FALA ZWYCZAJNA



matematyka ośrodków dwójłomnych, 6

$$(k_x^2 + k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon) [(k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon)(k_x^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_z) - k_x^2 k_z^2] = 0$$

Przypadek 2:

$$(k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon)(k_x^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_z) - k_x^2 k_z^2 = 0$$

proste rachunki dają

$$\frac{k_x^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_z} + \frac{k_z^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon} = 1$$

inaczej niż dla ośrodków izotropowych, współczynnik załamania światła **jest funkcją kierunku propagacji!**

wracamy do r-nań szukając wektorów własnych:

$$\begin{pmatrix} k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon & 0 & -k_x k_z \\ 0 & k_x^2 + k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon & 0 \\ -k_x k_z & 0 & k_x^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

Jeśli $(k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon)(k_x^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_z) - k_x^2 k_z^2 = 0$
to $E_y = 0$

Fala jest spolaryzowana liniowo w kierunku prostopadłym do y czyli wektor pola elektrycznego leży w płaszczyźnie zawierającej oś optyczną (kierunek z) oraz wektor falowy (płaszczyzna x – z)

FALA NADZWYKAJNA

współ. załamania w krysz. jednoosiowym

1. fala zwyczajna $k^2 = \left(\frac{n\omega}{c}\right)^2$

2. fala nadzwyczajna $\frac{k_x^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_z} + \frac{k_z^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon} = 1$

oznaczmy:

$$k_x = k \sin \Theta$$

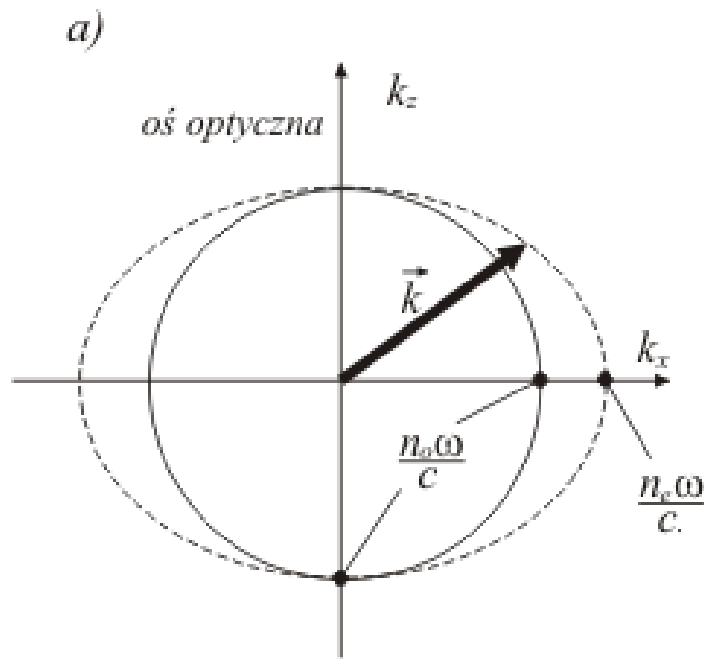
$$k_z = k \cos \Theta$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 \Theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \Theta}{n_o^2} = \frac{1}{n^2(\Theta)}$$

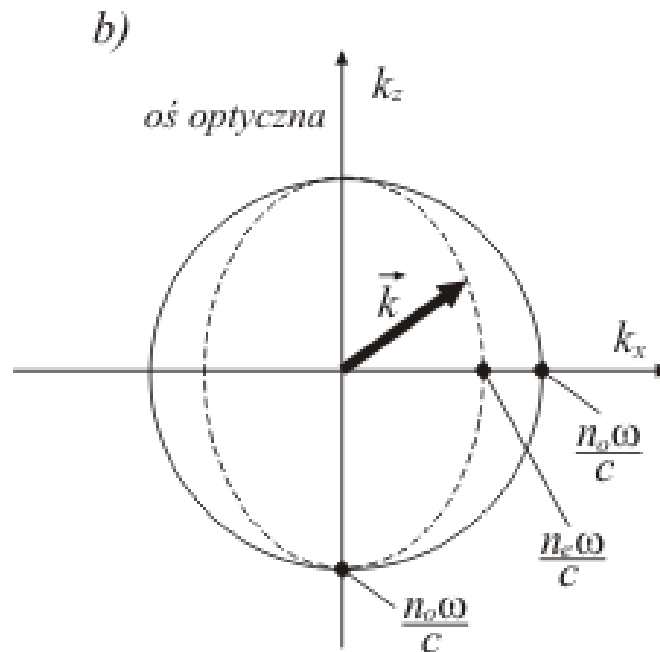
gdzie

$$n_o = \sqrt{\epsilon}$$

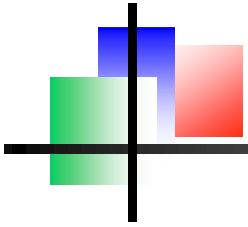
$$n_e = \sqrt{\epsilon_z}$$



kryształ jednoosiowy dodatni ($n_e > n_o$)



kryształ jednoosiowy ujemny ($n_e < n_o$)

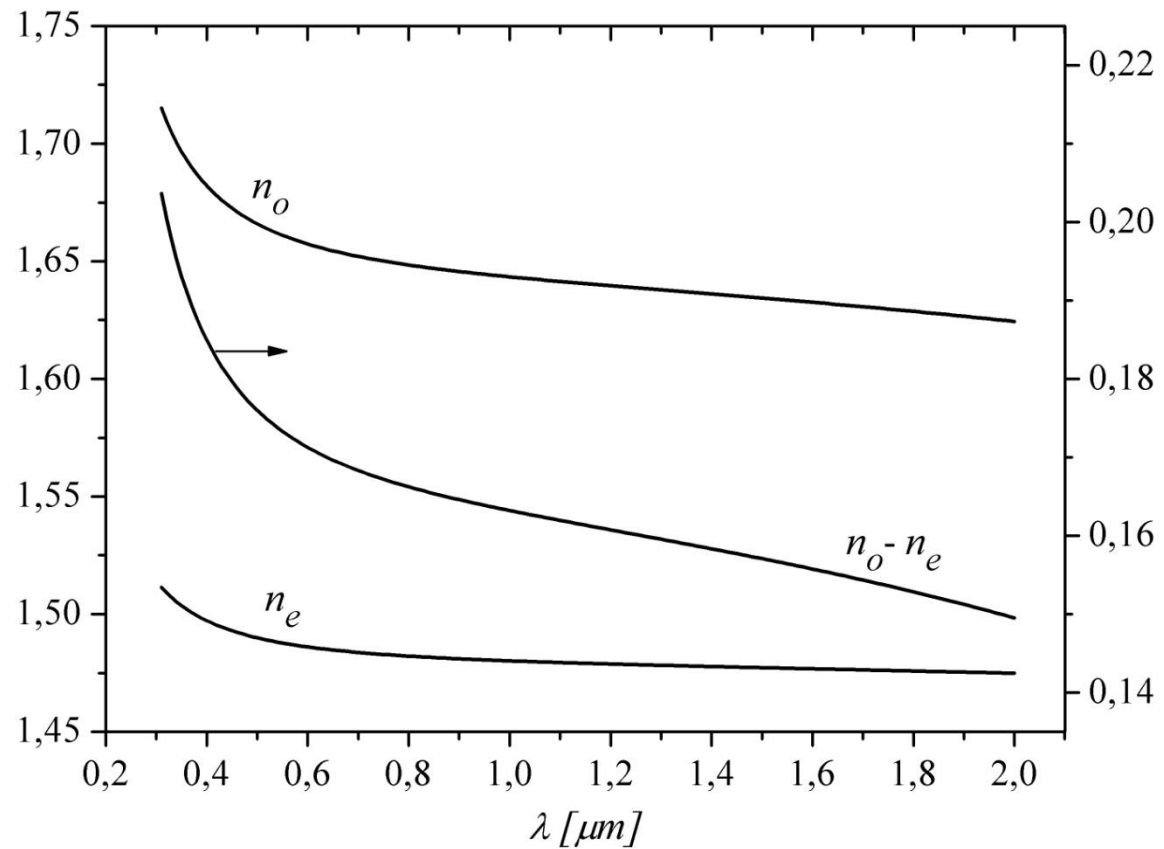


niektóre kryształy jednoosiowe

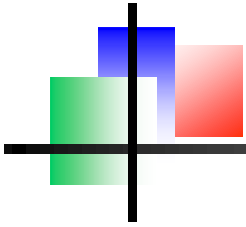
kryształ	formuła	n_o	n_e
kwarc	SiO_2	1.5443	1.5534
kalcyt	CaCO_3	1.6584	1.4793
korund	Al_2O_3	1.7682	1.6598
rutyl	TiO_2	2.6158	2.9020
KDP	KH_2PO_4	1.5098	1.4695
tlenek wanadowo-itrowy	YVO_4	1.958	2.168

dane dla $\lambda = 0.589 \mu\text{m}$

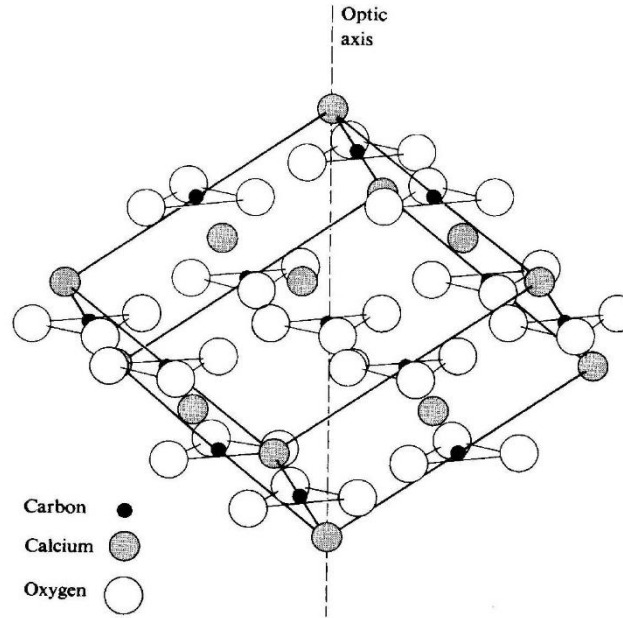
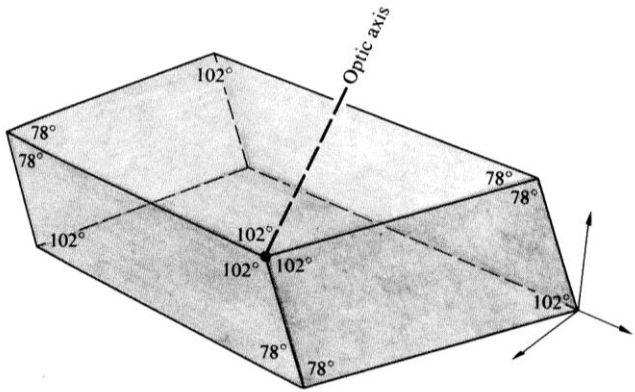
przykład 1- kalcyt



kryształ jednoosiowy ujemny ($n_e < n_o$)



kalcyt, szpat islandzki

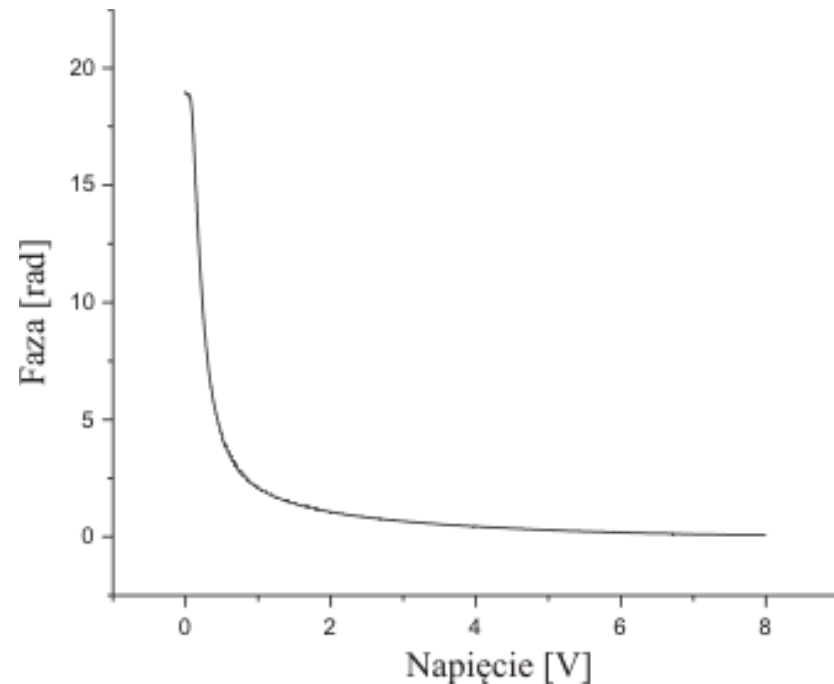
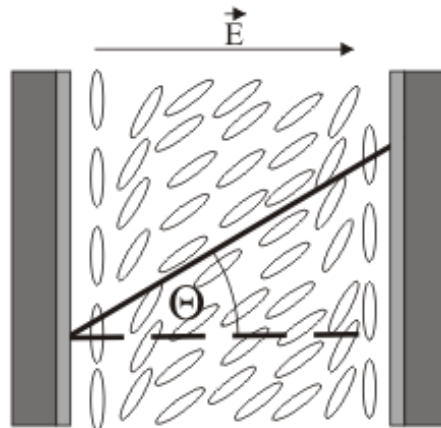
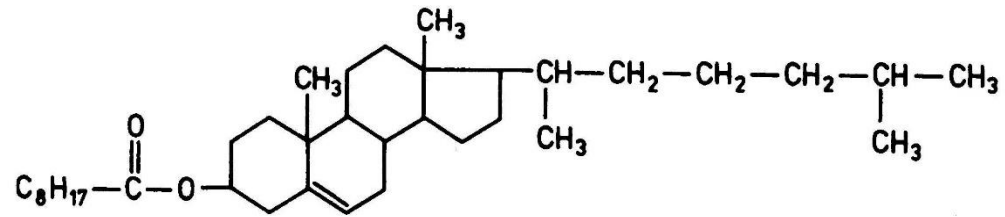
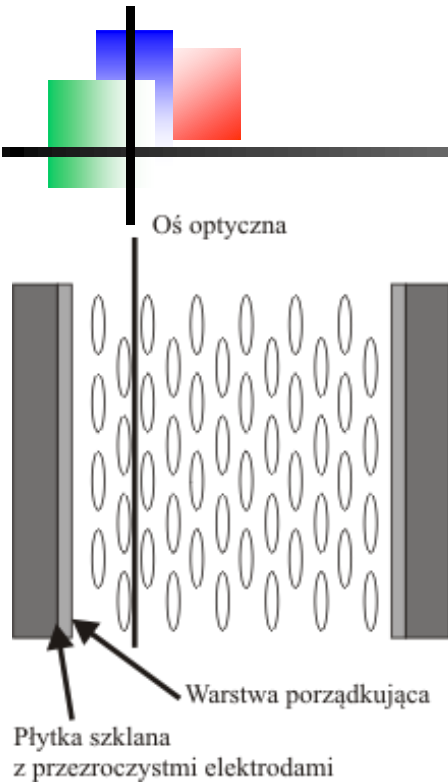


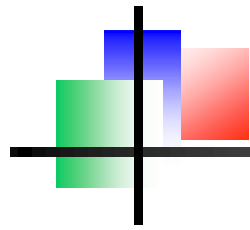
kordieryt



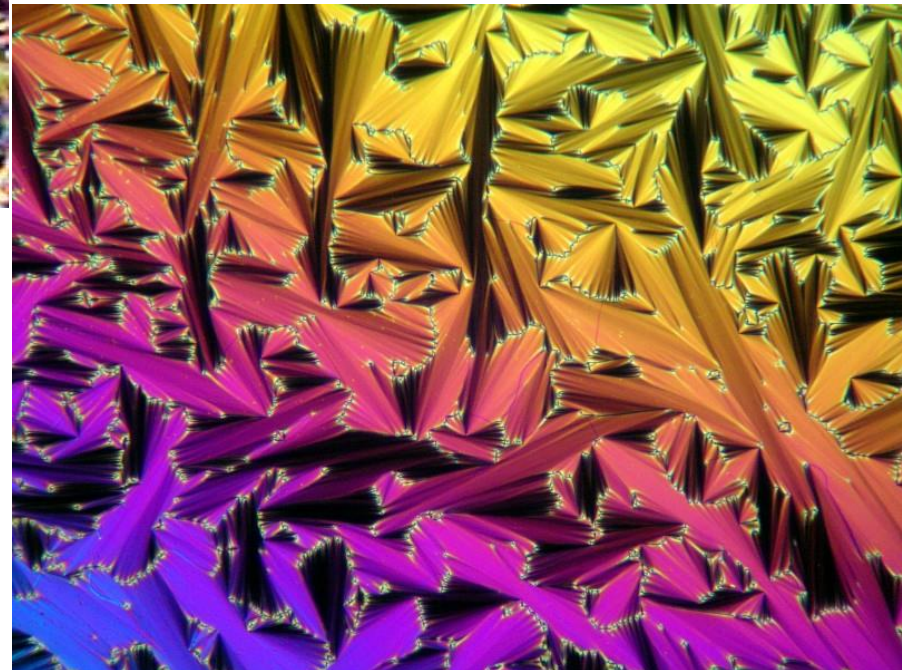
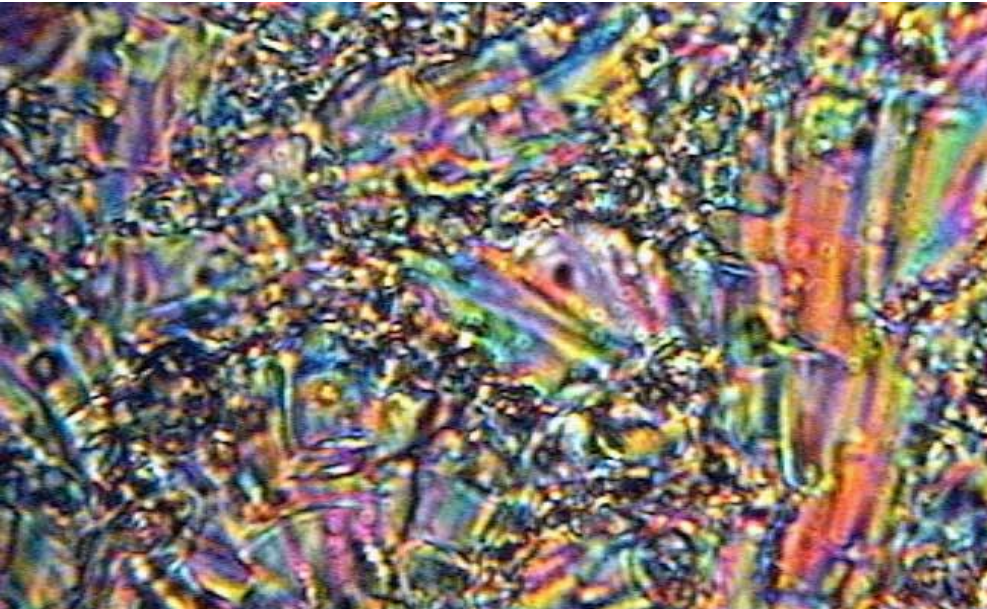
przykład 2, ciekłe kryształy

smektyki



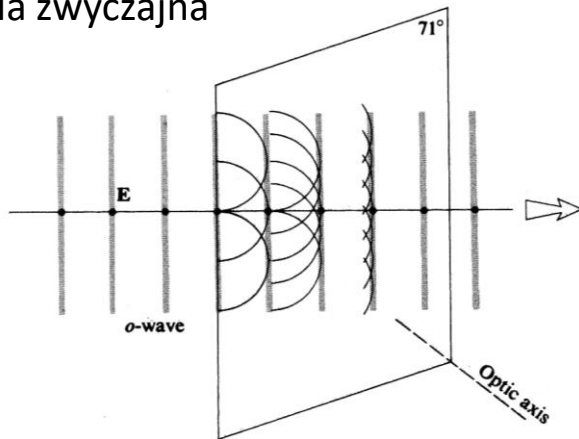


ciekłe kryształy – samoorganizacja smektyków

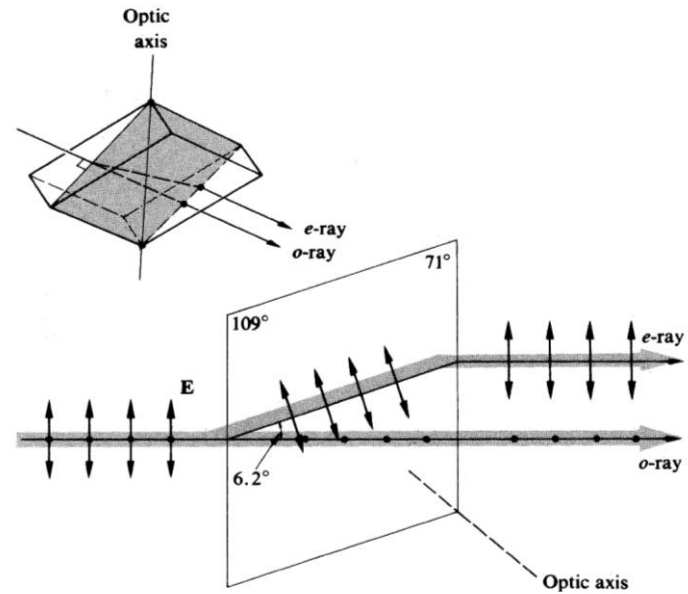
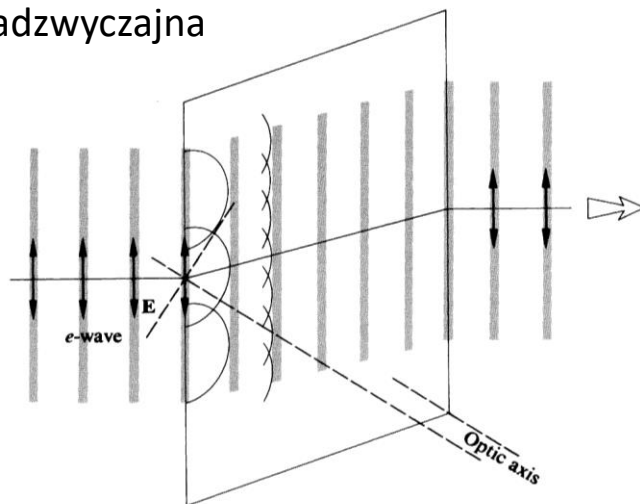


dryf, 1

fala zwyczajna

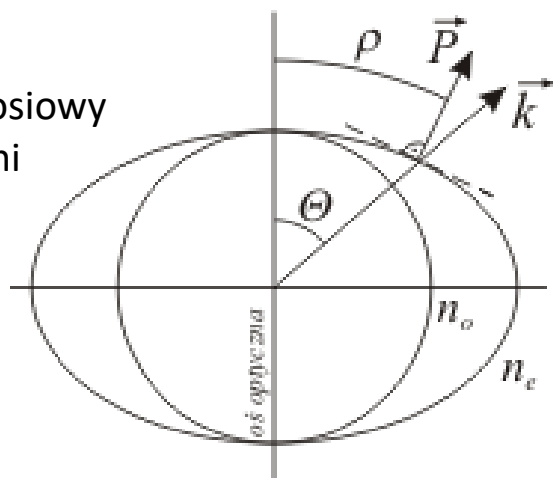


fala nadzwyczajna

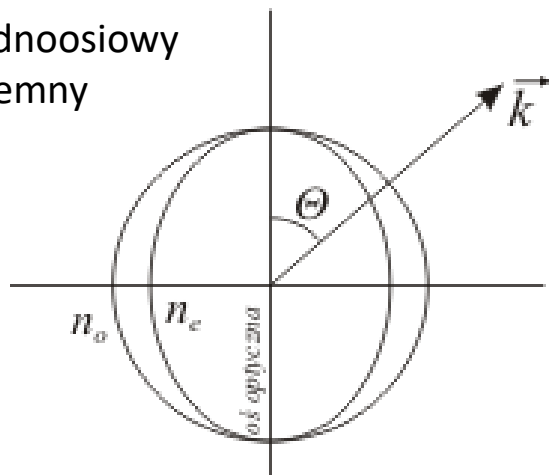


dryf, 2

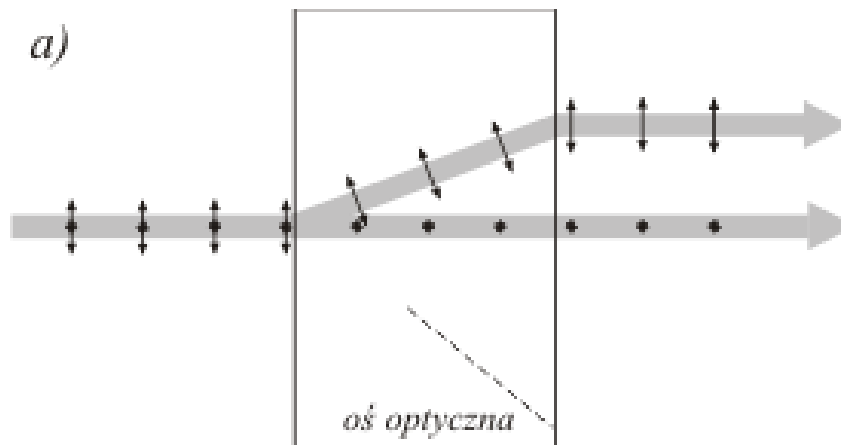
jednoosiowy
dodatni



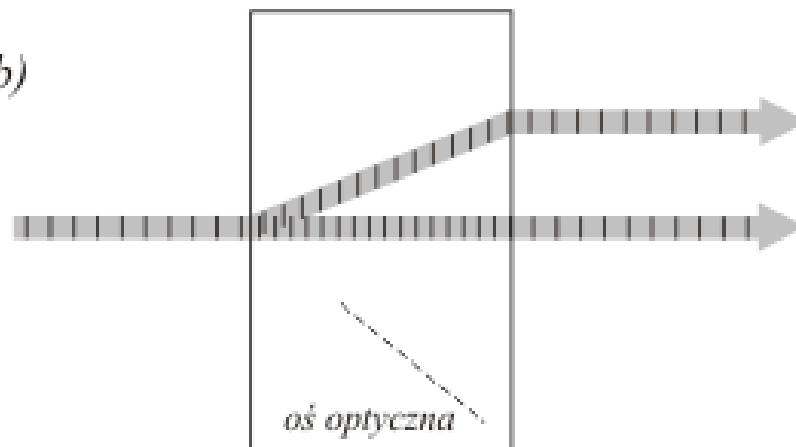
jednoosiowy
ujemny



a)



b)



dryf, 3

z rysunku:

$$\tan \Theta = \frac{D_z}{D_x}$$

$$\tan \varrho = \frac{E_z}{E_x}$$

ale

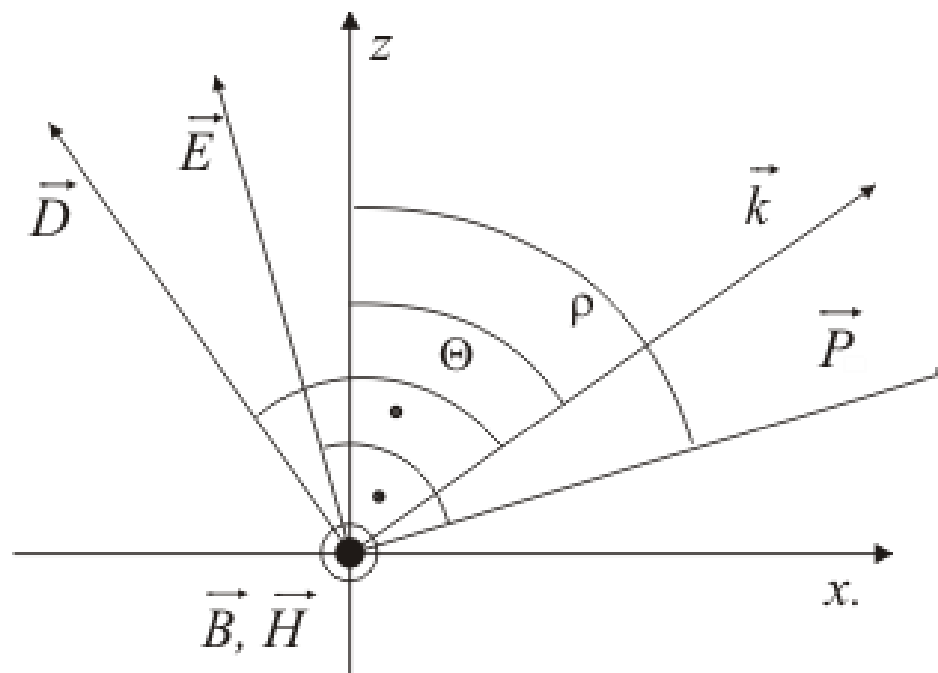
$$D_z = \epsilon_z E_z = n_e^2 E_z$$

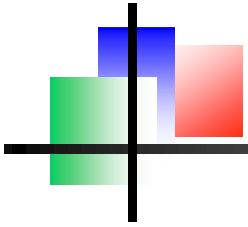
$$D_x = \epsilon E_x = n_o^2 E_x$$

skąd mamy

$$\tan \varrho = \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan \Theta$$

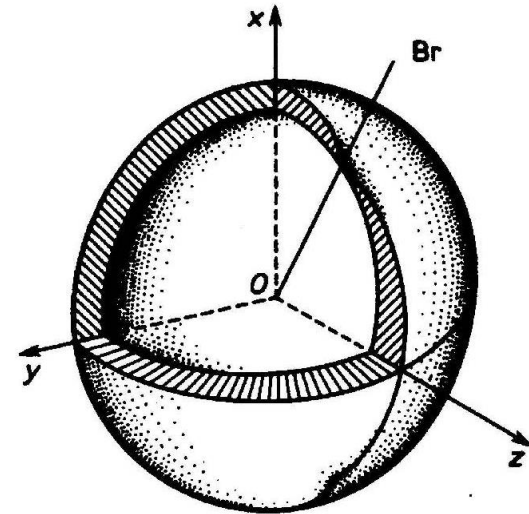
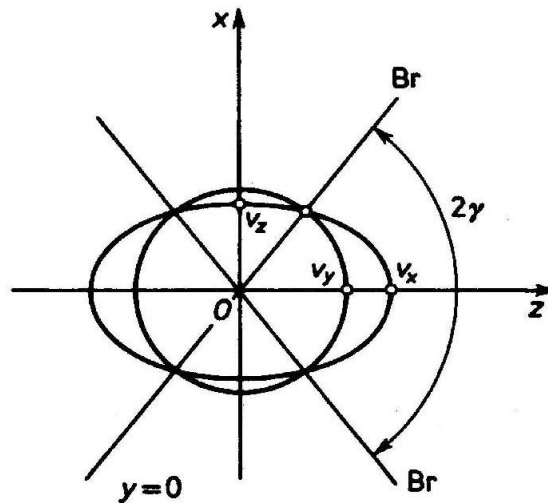
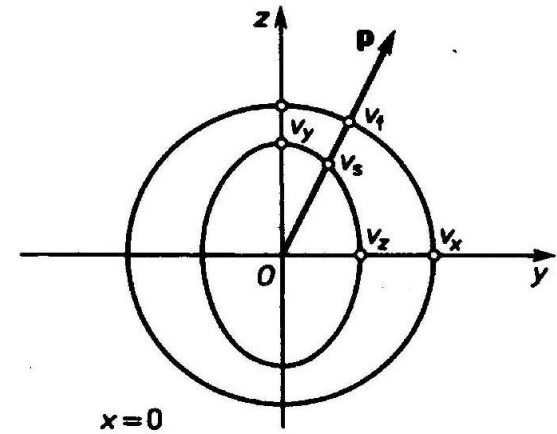
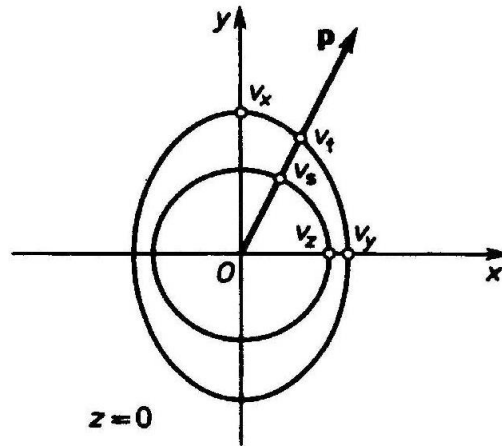
kąt dryfu: $\varrho - \Theta$

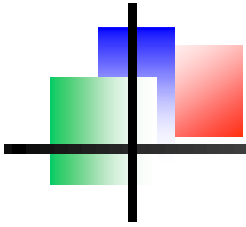




powierzchnia prędkości fazowych

w ogólnym przypadku
(kryształ dwuosiowy) –
powierzchnia dwuwarstwowa

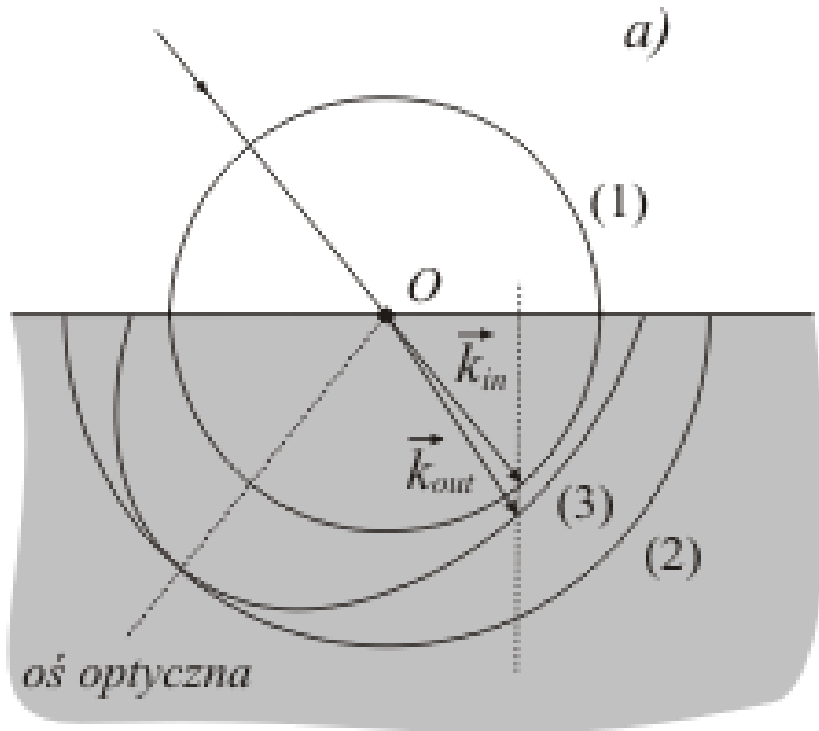




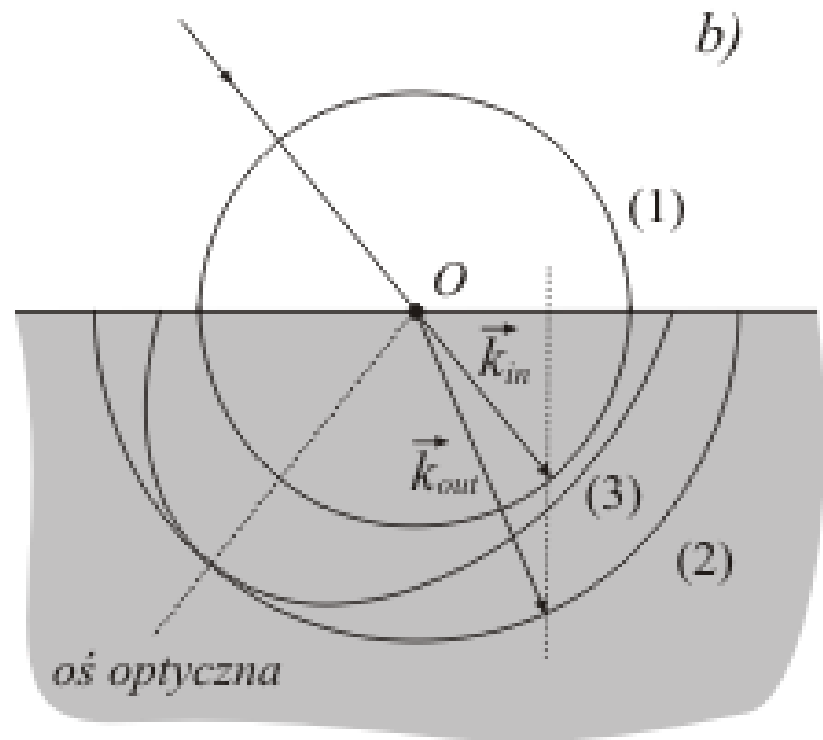
załamanie na granicy

„prawo natury”: przy załamaniu zachowuje się składowa styczna wektora falowego

$$k = \frac{n\omega}{c}$$



fala nadzwyczajna



fala zwyczajna

kryształ jednoosiowy

polaryzacja światła

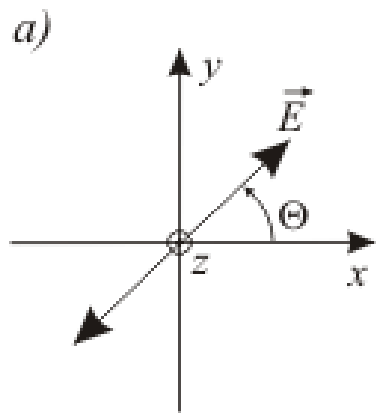
uwaga na zmianę konwencji:
od tej transparencji z jest kierunkiem propagacji światła

płaska fala monochromatyczna

propagacja w kierunku z : $\vec{E}_{in}(z, t) = e^{i(kz - \omega t)} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}$

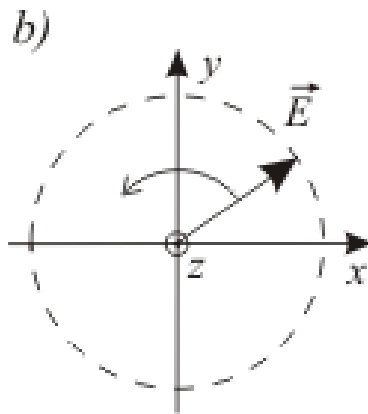
Uwaga: zespolone wartości E_x i E_y definiują polaryzację światła

$$\begin{bmatrix} \cos \Theta \\ \sin \Theta \end{bmatrix}$$



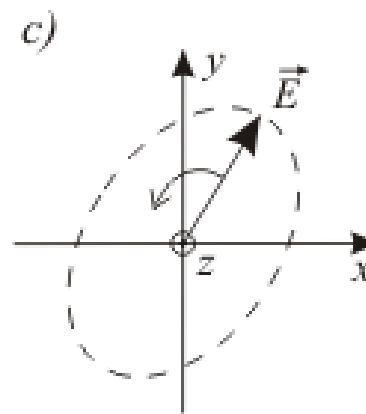
liniowa

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}$$



kołowa

$$\begin{bmatrix} \cos \Theta \\ \sin \Theta e^{i\varphi} \end{bmatrix}$$



eliptyczna

propagacja: $\vec{k} \perp$ oś, 1

w kryształach mogą się rozchodzić tylko dwie fale: zwyczajna i nadzwyczajna

Fala wejściowa to

$$\vec{E}_{in}(z, t) = e^{i(kz - \omega t)} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}$$

Propagacja zmienia fazę

$$\vec{E}_{out}(z, t) = e^{i(kz - \omega t)} \begin{bmatrix} E_x e^{i\delta_x} \\ E_y e^{i\delta_y} \end{bmatrix}$$

o wartości

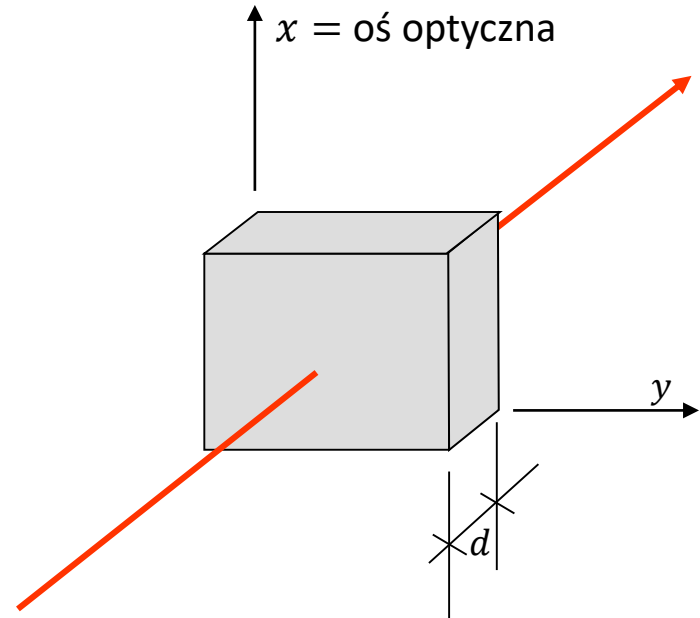
$$\delta_x = k_0 n_e d$$

$$\delta_y = k_0 n_o d$$

Ostatecznie

$$\vec{E}_{out}(z, t) = e^{i(kz - \omega t)} e^{i\delta_x} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y e^{i\Gamma} \end{bmatrix}$$

przy czym $\Gamma = \delta_y - \delta_x = k_0 d (n_o - n_e)$



Różnica faz dla dwóch liniowych polaryzacji

$$\Gamma = k_0 (n_o - n_e) d$$

Kiedy

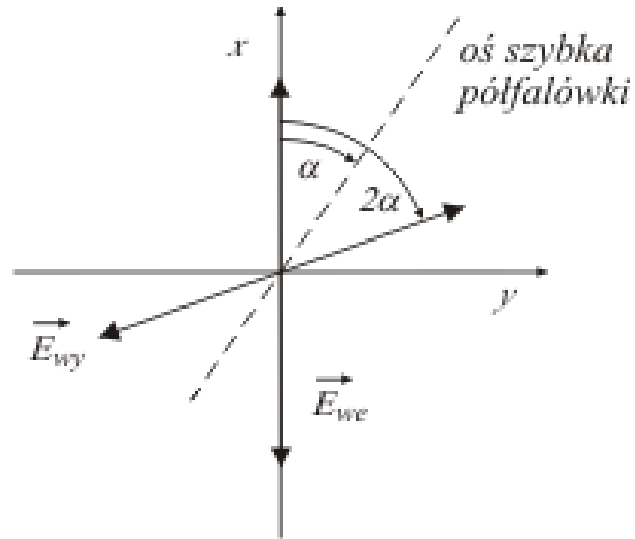
$$\Gamma = m \cdot 2\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

polaryzacja pozostaje niezmienną

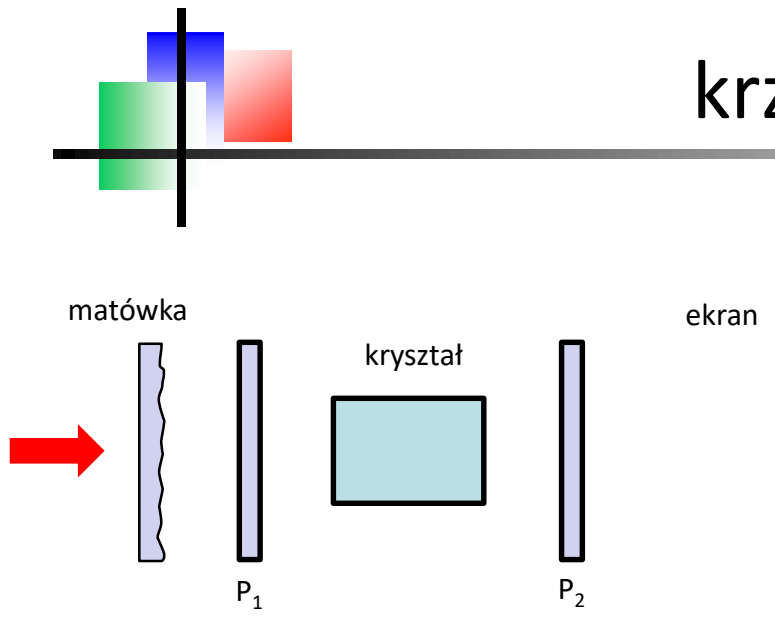
W pozostałych przypadkach mamy **zmianę stanu polaryzacji światła**

propagacja: $\vec{k} \perp$ oś, 2

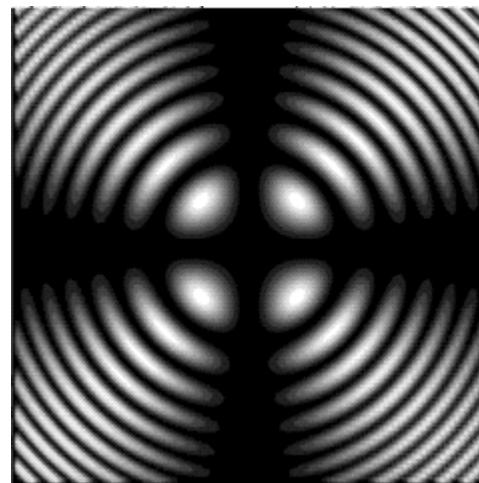
Jeśli polaryzacja wejściowa jest liniowa
i $\Gamma = m\pi, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
to mamy obrót płaszczyzny polaryzacji
a płytkę nazywamy półfalówką



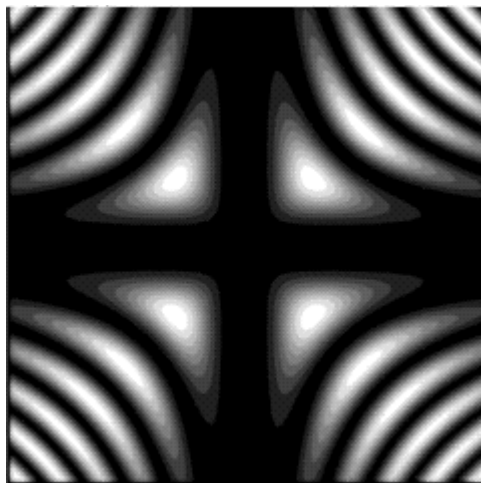
krzywe konoskopowe



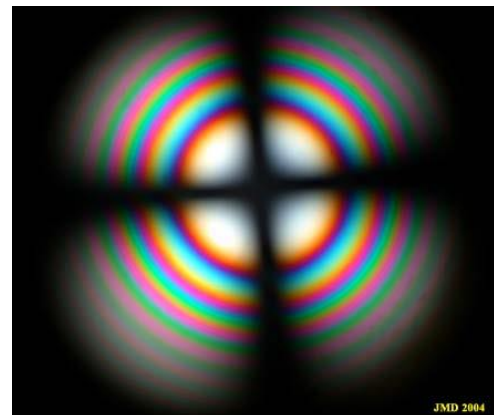
oś opt. $\parallel$ z, mono.



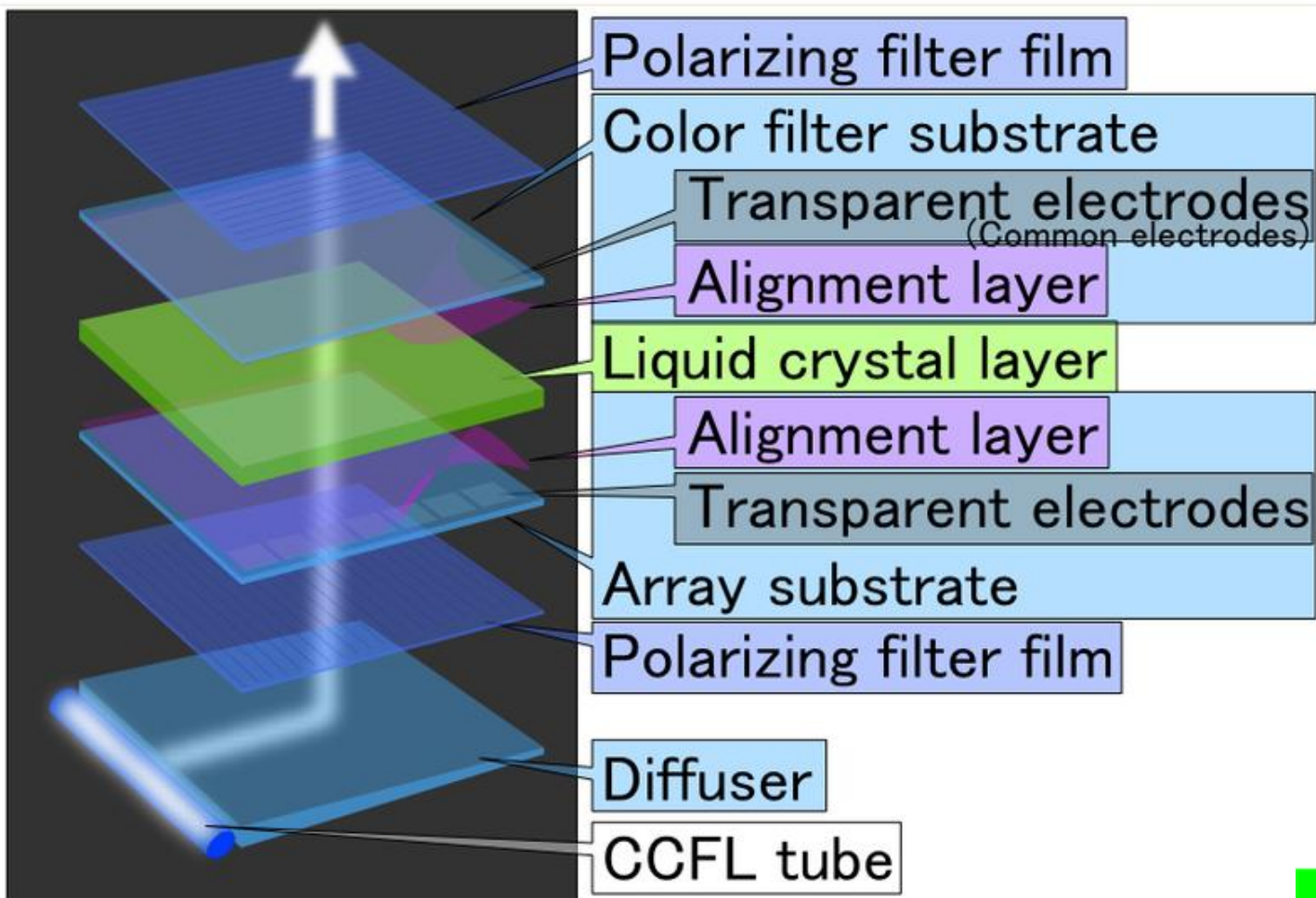
oś opt. w płaszczyźnie x-y 45° , mono



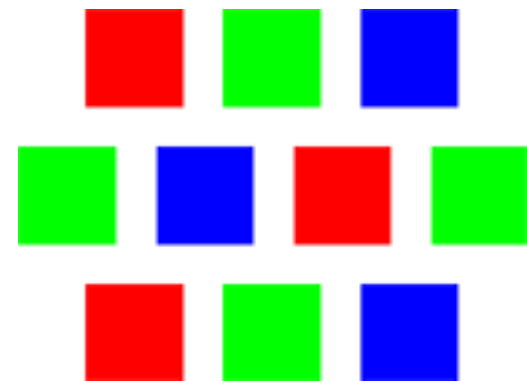
oś opt. $\parallel$ z, poli.

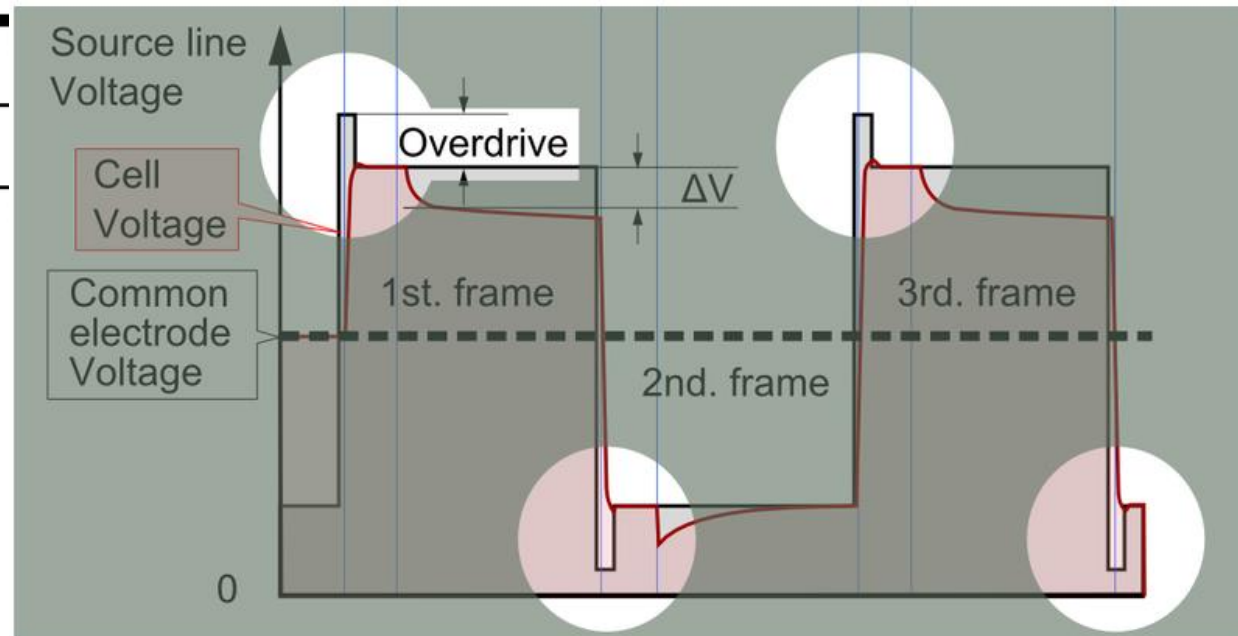


wyświetlacze LCD

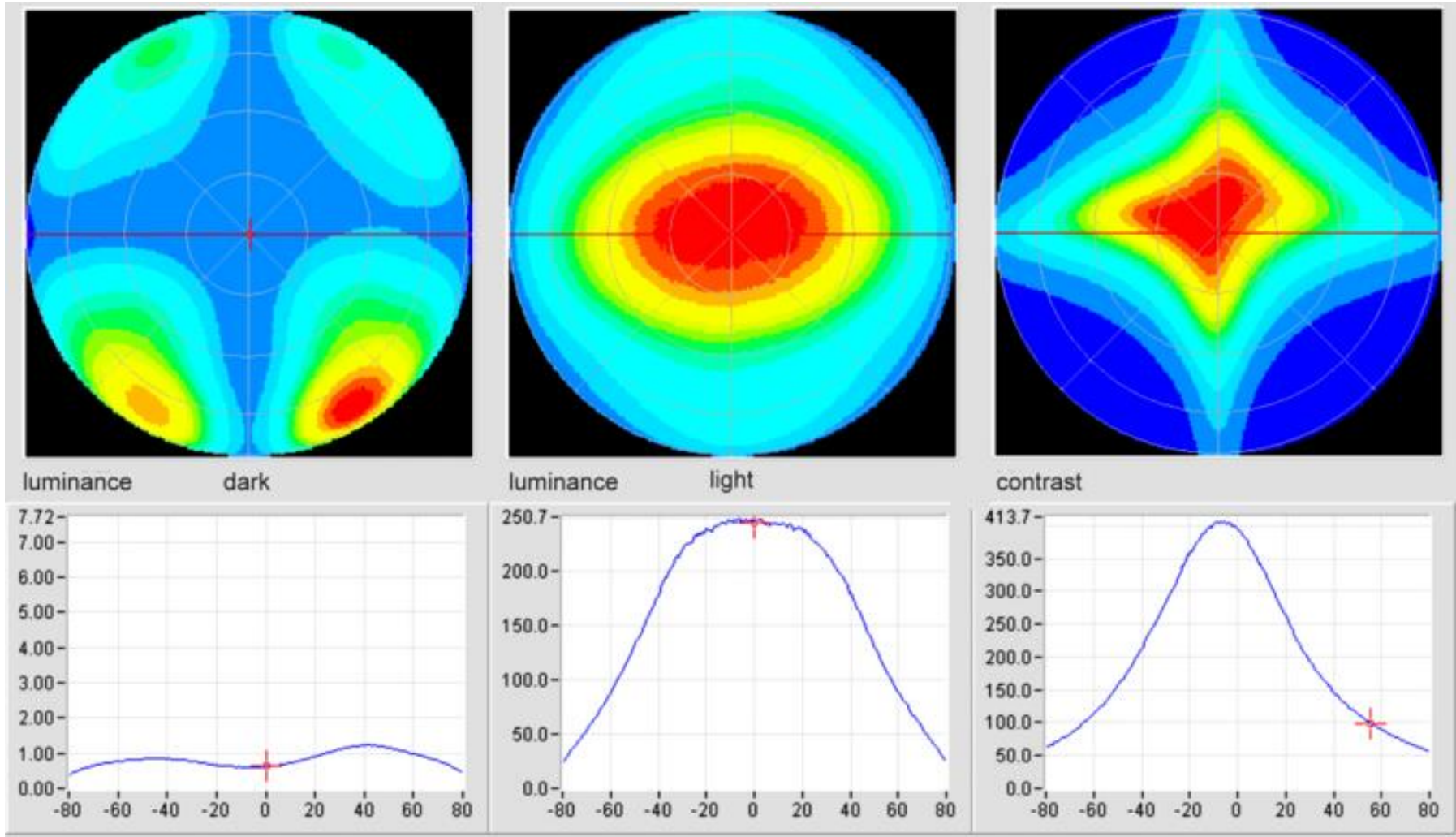


RGB





LCD – duże kąty



HUP – Head Up Display

