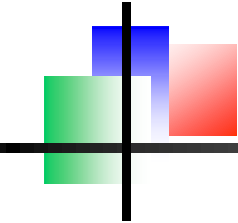


Podstawy Fizyki III

Optyka z elementami fizyki współczesnej

wykład 19, 08.12.2017

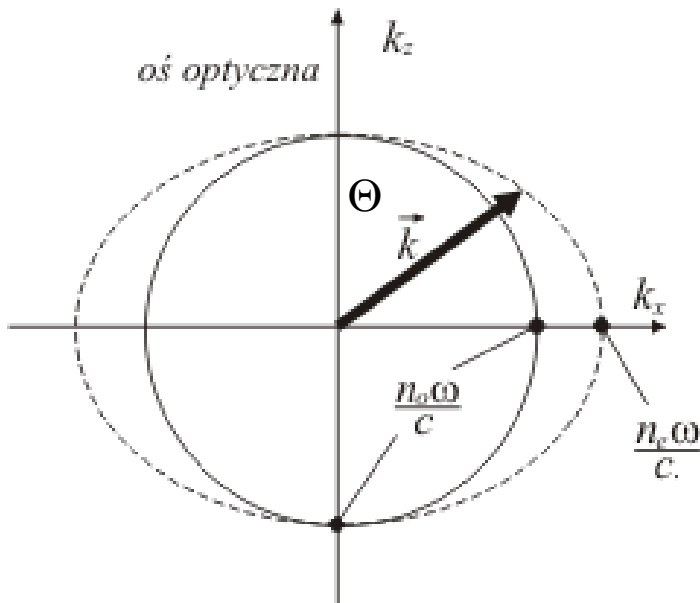
wykład:	Czesław Radzewicz
pokazy:	Mateusz Winkowski, Łukasz Zinkiewicz
ćwiczenia:	Radosław Łapkiewicz



Wykład 18 - przypomnienie

- model Lorentza w ośrodku anizotropowym
- dwójłomność - opis fenomenologiczny: dwie fale
- dwójłomność – opis matematyczny: fala zwyczajna, fala nadzwyczajna
- zależny od kierunku współczynnik załamania i jego konsekwencje - dryf

wykład 18 - przypomnienie



kryształ jednoosiowy, dwie stałe: n_o, n_e
możliwe oba przypadki: $n_o < n_e$ i $n_o > n_e$
oś optyczna kryształu oraz wektor falowy
wyznaczają płaszczyznę.

Rozwiązania r-nia falowego to 2 płaskie fale:

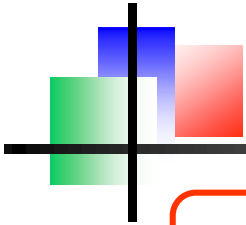
- **zwyczajna**, polaryzacja prostopadła do płaszczyzny, współczynnik załamania nie zależy od kierunku propagacji: n_o
- **nadzwyczajna**, polaryzacja w płaszczyźnie, współczynnik załamania zależy od kierunku propagacji:

$$\frac{1}{n^2(\Theta)} = \frac{\sin^2 \Theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \Theta}{n_o^2}$$

Przypadek szczególny: propagacja prostopadła do osi optycznej:

fala zwyczajna: n_o

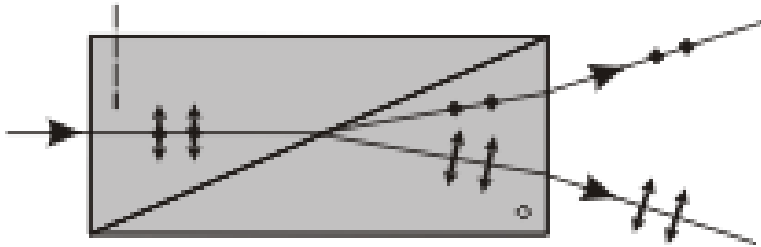
fala nadzwyczajna: n_e



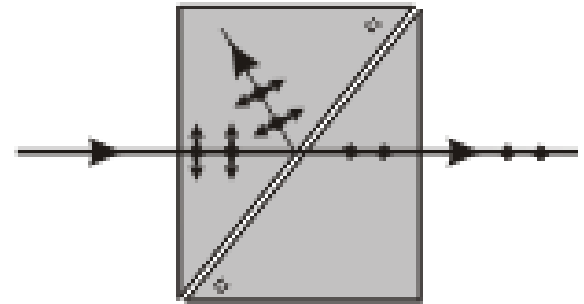
polaryzatory krystaliczne

w kryształach dwójłomnych mogą się rozchodzić tylko dwie fale każda o polaryzacji liniowej : zwyczajna i nadzwyczajna

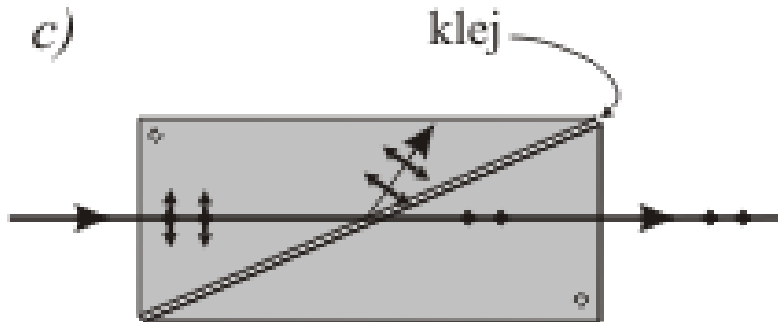
a)



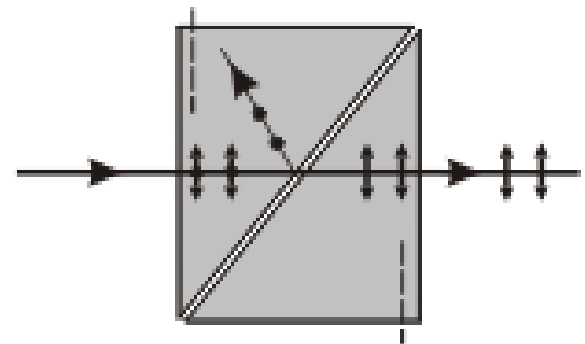
b)



c)



d)



a) Wollaston, b) Glan- Foucault, c) Glan-Thompson, d) Glan-Taylor.

płytki falowe

oś optyczna równoległa do
 x bądź y – fala o polaryzacji
równoległej do x ma $n = n_f$.

fala wolna: n_s

fala szybka: n_f

$n_s > n_f$

Indeksy:

f (ang. *fast*)

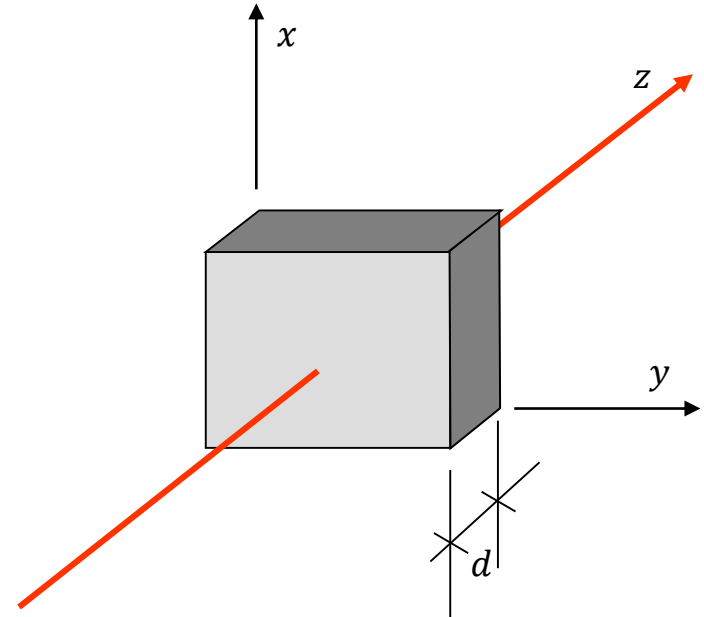
s (ang. *slow*)

$$\vec{E}_{in}(z, t) = e^{i(kz - \omega t)} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}_{out}(z, t) = e^{i(kz - \omega t)} e^{i\delta_f} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y e^{i\Gamma} \end{bmatrix}$$

$$\delta_s = n_s k_0 d, \Gamma = k_0 d (n_s - n_f)$$

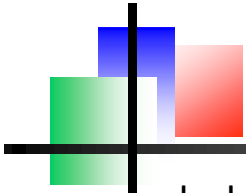
k_0 - liczba falowa w próżni



uwaga: z nie jest
kierunkiem osi optycznej a
kierunkiem propagacji fali

$\Gamma = (2m + 1)\pi, m = 0, 1, 2, \dots$ - półfalówka rzędu m

$\Gamma = (2m + 1)\frac{\pi}{2}, m = 0, 1, 2, \dots$ - ćwierćfalówka rzędu m



polaryzacja światła, wektor Jonesa

płaska fala monochromatyczna propagacja w kierunku z:

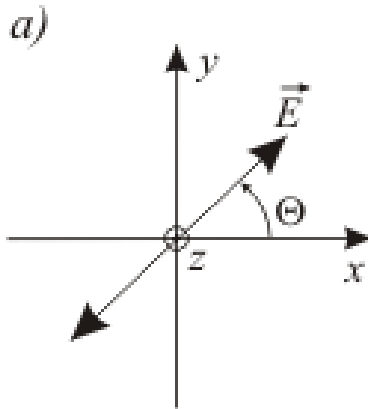
$$\vec{E}(z, t) = \begin{bmatrix} E_{0x} e^{i(kz - \omega t + \varphi_x)} \\ E_{0y} e^{i(kz - \omega t + \varphi_y)} \end{bmatrix} = E_0 e^{i(kz - \omega t + \varphi)} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}$$

$V = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}$ to znormalizowany ($V_x V_x^* + V_y V_y^* = 1$) wektor Jonesa

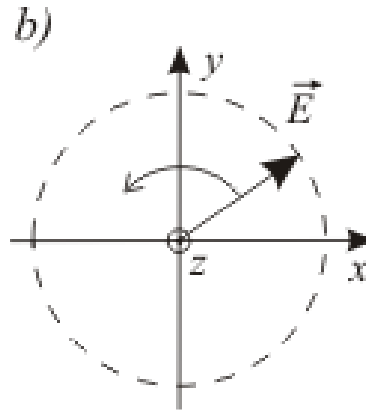
$$\begin{bmatrix} \cos \Theta \\ \sin \Theta \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}$$

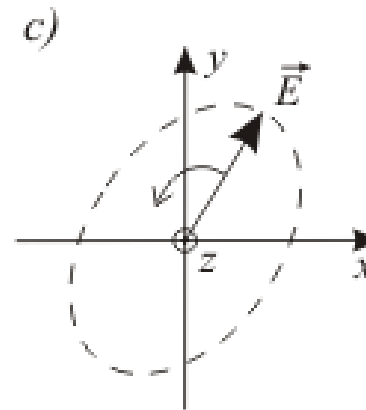
$$\begin{bmatrix} \cos \Theta \\ \sin \Theta e^{i\phi} \end{bmatrix}$$



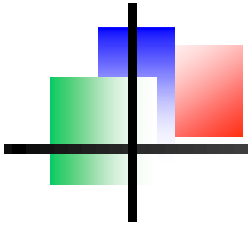
liniowa



kołowa L



eliptyczna

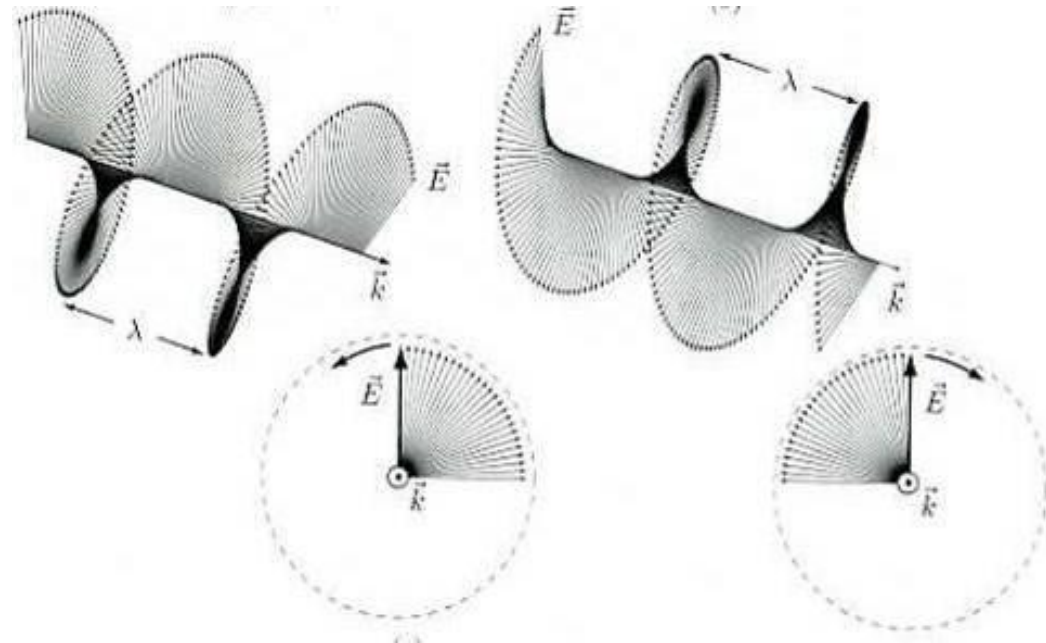
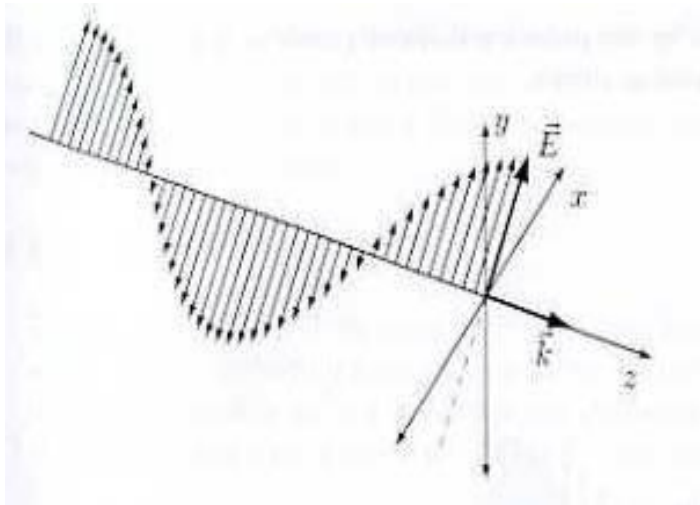
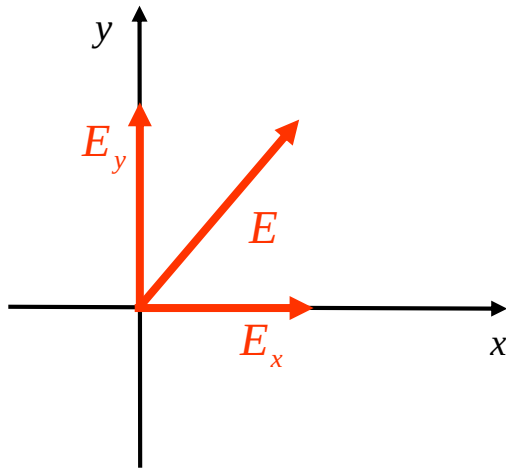


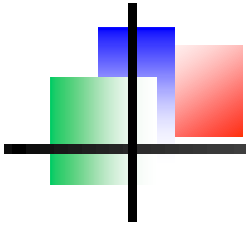
światło całkowicie spolaryzowane, 1

dysponujemy kompletnym przepisem na obie składowe pola

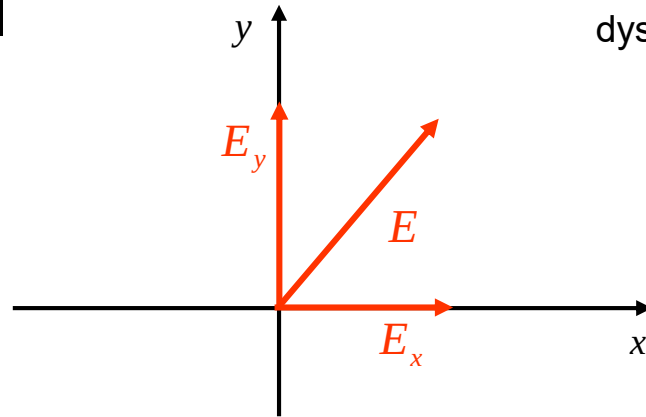
$$E_x(z, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \varphi_x)$$

$$E_y(z, t) = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varphi_y)$$





światło całkowicie spolaryzowane, 2



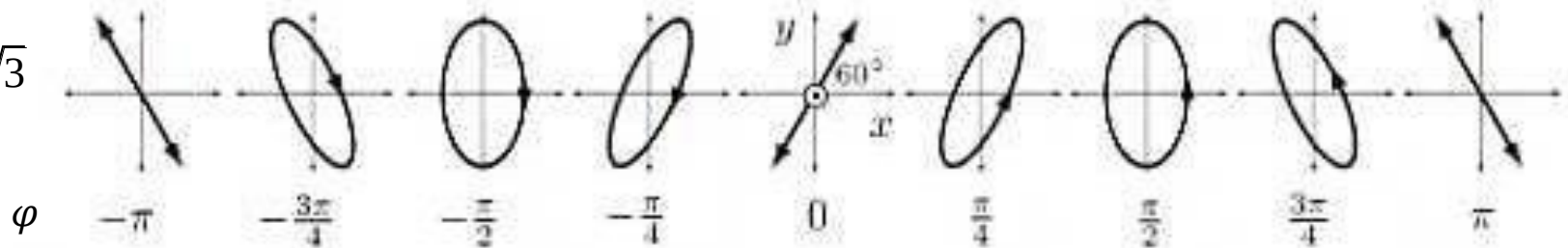
dysponujemy kompletnym przepisem na obie składowe pola

$$E_x(z, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \varphi_x)$$

$$E_y(z, t) = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varphi_y)$$

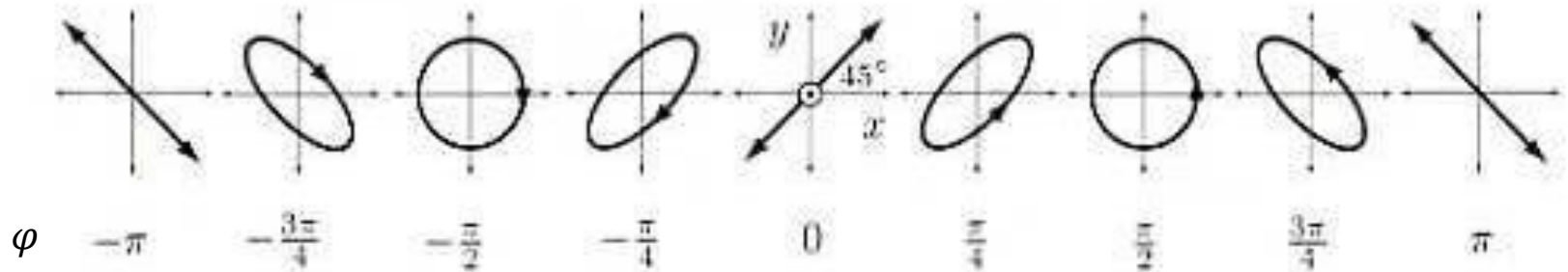
$$\varphi = \varphi_y - \varphi_x$$

$$\frac{E_{0y}}{E_{0x}} = \sqrt{3}$$

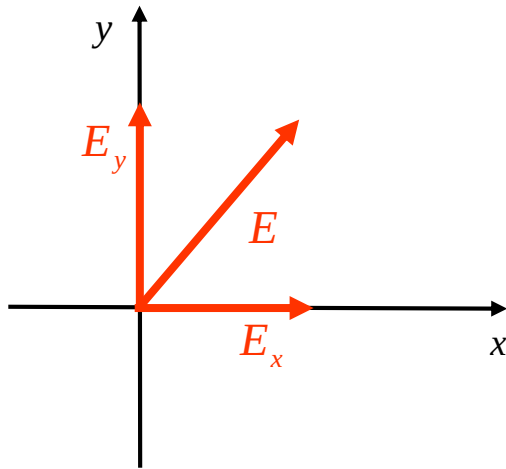


(a)

$$\frac{E_{0y}}{E_{0x}} = 1$$



światło całkowicie spolaryzowane, 3

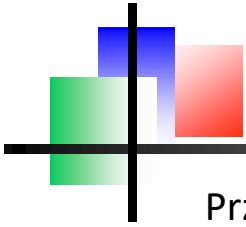


Polaryzacja zależna od czasu:

$$E_x(z, t) = E_{0x} \cos[kz - \omega t + \varphi_x(t)]$$

$$E_y(z, t) = E_{0y} \cos[kz - \omega t + \varphi_y(t)]$$

$\varphi_x(t)$ oraz $\varphi_y(t)$ - funkcje deterministyczne



wektor Jonesa, 2

Przestrzeń wektorów Jonesa jest 2D. Możemy wybierać różne bazy, na przykład:

baza polaryzacji linowych:
$$\begin{cases} \vec{V}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vec{V}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

baza polaryzacji kołowych:
$$\begin{cases} \vec{V}_P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \\ \vec{V}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \end{cases}$$

Dla dowolnego wektora $\vec{V}$

$$\vec{V} = V_x \vec{V}_x + V_y \vec{V}_y$$

i podobnie

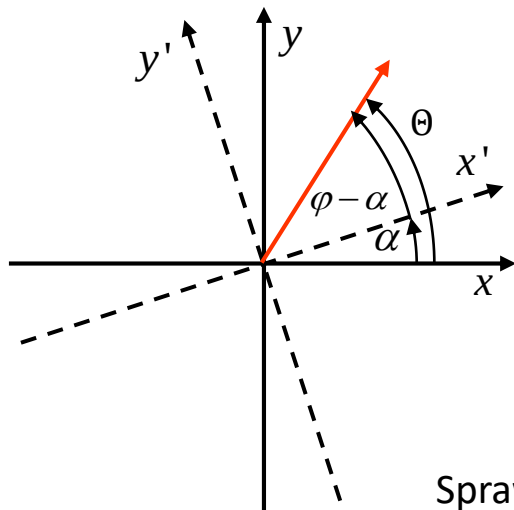
$$\vec{V} = V_P \vec{V}_P + V_L \vec{V}_L$$

zmiana bazy

$$\begin{bmatrix} V_P \\ V_L \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_P \\ V_L \end{bmatrix}$$

wektor Jonesa, 3

obrót układu odniesienia



$$\begin{aligned}x' &= r \cos(\Theta - \alpha) = \cos \alpha \cdot r \cos \Theta + \sin \alpha \cdot r \sin \Theta \\y' &= r \sin(\Theta - \alpha) = -\sin \alpha \cdot r \cos \Theta + \cos \alpha \cdot r \sin \Theta\end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned}x' &= \cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y \\y' &= -\sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y\end{aligned}$$

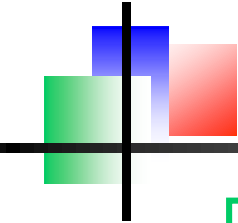
$$R_{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Sprawdzamy, że obrót układu odniesienia nie zmienia polaryzacji światła.
Weźmy, przykładowo, polaryzację liniową:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Theta \\ \sin \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \Theta + \sin \alpha \sin \Theta \\ -\sin \alpha \cos \Theta + \cos \alpha \sin \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Theta - \alpha) \\ \sin(\Theta - \alpha) \end{bmatrix}$$

lub kołową:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos \alpha + i \sin \alpha \\ -\sin \alpha + i \cos \alpha \end{bmatrix} = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$



macierze Jonesa, 1

Lemat: każdej operacji zmieniającej stan polaryzacji światła (całkowicie spolaryzowanego) możemy przypisać macierz Jonesa 2x2

Wyjściowy wektor Jonesa to iloczyn macierzy Jonesa i wektora wejściowego

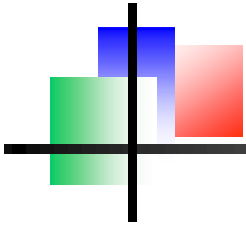
Przykład 1: jednorodny ośrodek ze współ. załamania n . Propagacja na drodze d

$$\vec{E}(z + d, t) = \vec{E}(z, t)e^{ikd} = e^{ikd} \begin{bmatrix} E_x(z, t) \\ E_y(z, t) \end{bmatrix} = e^{ikd} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x(z, t) \\ E_y(z, t) \end{bmatrix}$$
$$\vec{V}' = W_d \vec{V}, \quad W_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład 2: polaryzator, oś równoległa do x

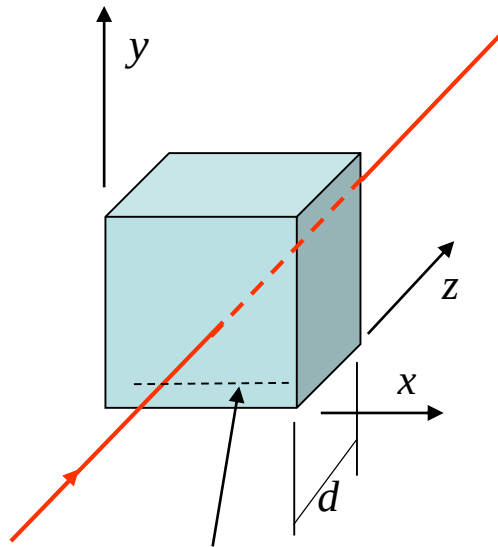
$$\vec{E}_{in} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \quad \vec{E}_{out} = \begin{bmatrix} E_x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}$$
$$\vec{V}' = W_{Px} \vec{V}, \quad W_{Px} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dla elementów polaryzacyjnych nie zmieniających natężenia macierz Jonesa jest unitarna



macierze Jonesa, 2

Przykład 3: płytka falowa, opóźnienie Γ , oś szybka równoległa do osi x



oś szybka
płytki falowej

$$\vec{E}(z + d, t) = \begin{bmatrix} e^{ik_f d} E_x(z, t) \\ e^{ik_s d} E_y(z, t) \end{bmatrix} = e^{ik_f d} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x(z, t) \\ E_y(z, t) \end{bmatrix}$$

$$k_f = \frac{n_f \omega}{c}, k_s = \frac{n_s \omega}{c}, \Gamma = (k_s - k_f)d$$

$$\vec{V}_{out} = W_{\Gamma} \vec{V}_{in}, \quad W_{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma} \end{bmatrix}$$

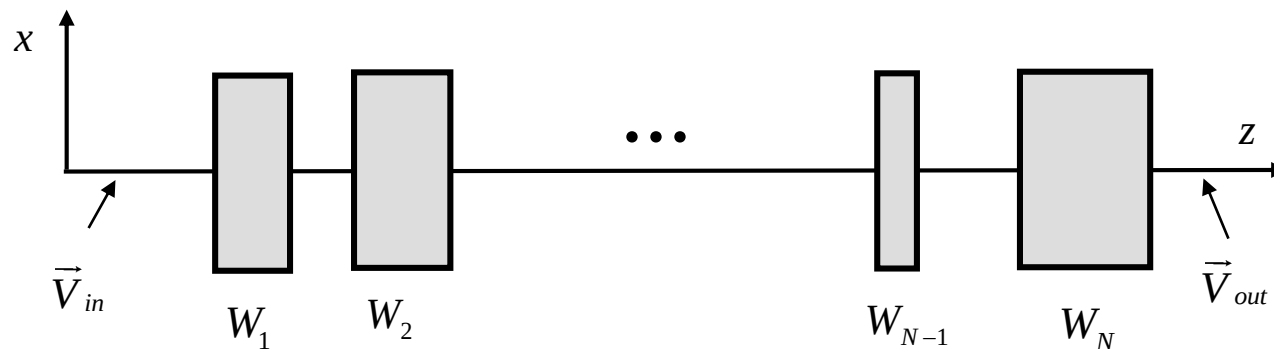
półfalówka $W_{\pi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

ćwierćfalówka $W_{\pi/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$

Uwaga: macierz Jonesa elementu polaryzacyjnego podajemy w wybranym układzie odniesienia; w innym układzie odniesienia ta macierz jest, na ogół, inna.

macierze Jonesa, 3

Muльтипликативность матрицы Jonesa

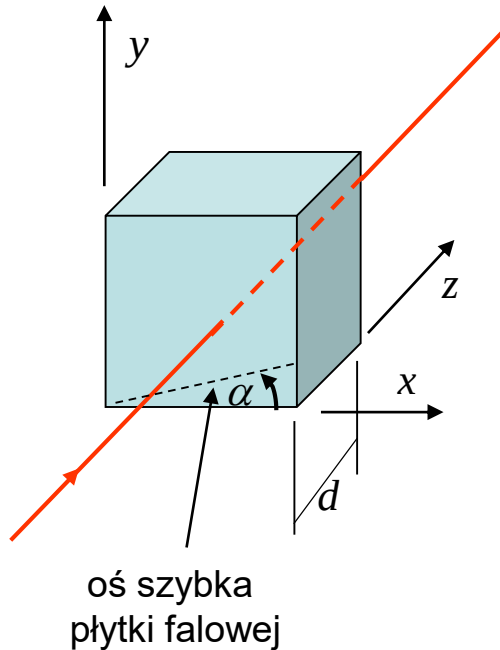


$$W = W_N \cdot W_{N-1} \cdot \dots \cdot W_2 \cdot W_1$$

$$\vec{V}_{out} = W \vec{V}_{in}$$

macierze Jonesa, 4

Przykład 4: płytka falowa, opóźnienie Γ , oś szybka pod kątem α do osi x



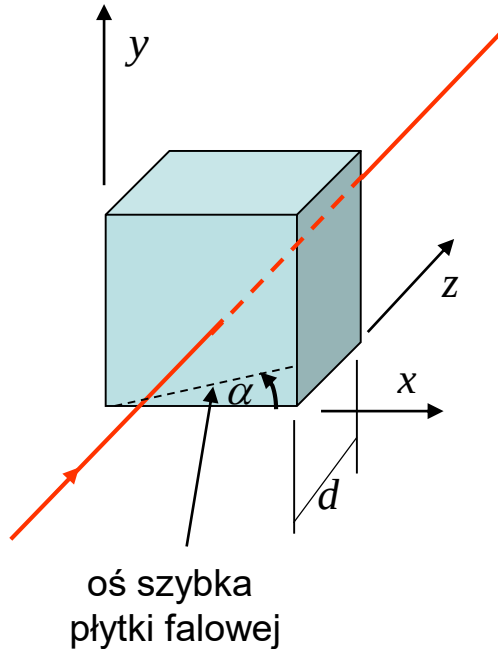
GENERALNA RECEPTA:

- Przejście do układu odniesienia płytki falowej
- Macierz płytki falowej
- Powrót do układu laboratoryjnego

$$\begin{aligned} W_{\Gamma\alpha} &= W_{-\alpha} W_{\Gamma} W_{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha + e^{i\Gamma} \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha (1 - e^{i\Gamma}) \\ \sin \alpha \cos \alpha (1 - e^{i\Gamma}) & \sin^2 \alpha + e^{i\Gamma} \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

macierze Jonesa, 5

Przykład 4 c.d.



$$W_{\Gamma\alpha} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + e^{i\Gamma}\sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha(1 - e^{i\Gamma}) \\ \sin\alpha\cos\alpha(1 - e^{i\Gamma}) & \sin^2\alpha + e^{i\Gamma}\cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

płytką półfalowa: $e^{i\Gamma} = -1$

$$\vec{V}_{out} = W_{\Gamma\pi} \vec{V}_{in} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix} \vec{V}_{in}$$

1. Liniowa polaryzacja wejściowa ($\parallel x$)

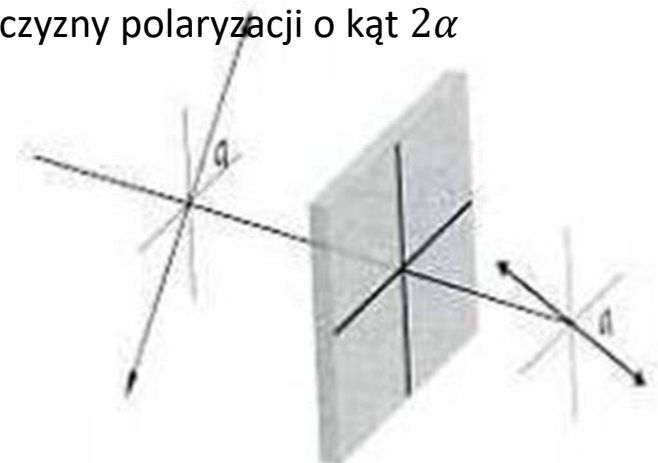
$$\begin{aligned} \vec{V}_{out} &= W_{\Gamma\pi} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

obrót płaszczyzny polaryzacji o kąt 2α

2. Kołowa polaryzacja wejściowa; układ odniesienia nieistotny

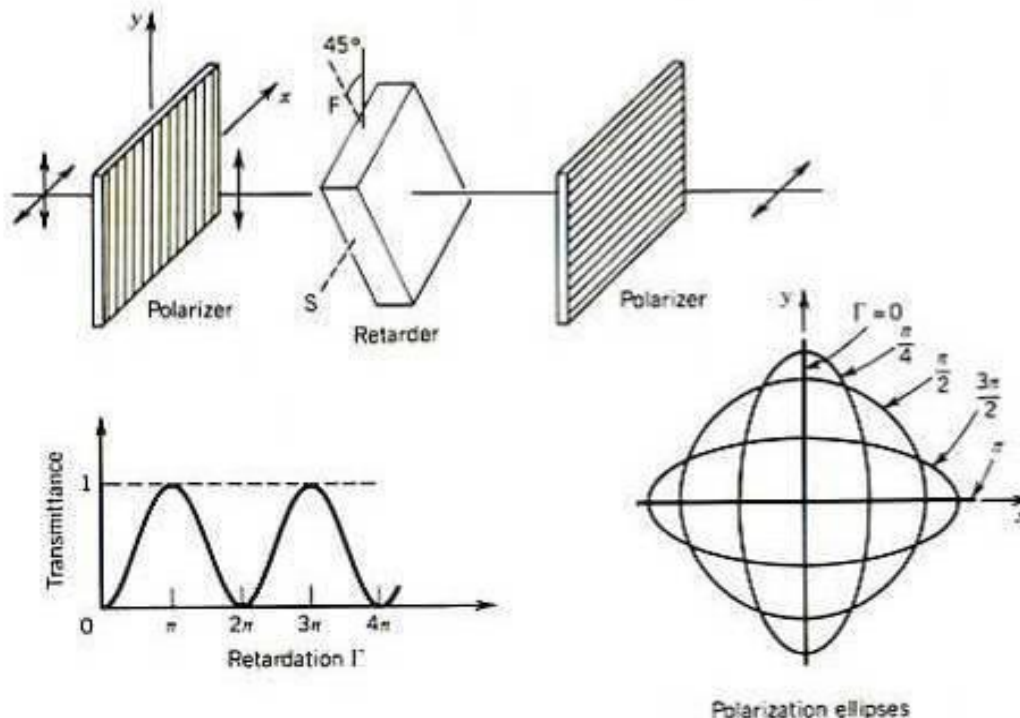
$$\vec{V}_{out} = W_{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \mp i \end{bmatrix}$$

zmiana skrętności



macierze Jonesa, 6

Przykład: płytka falowa pomiędzy polaryzatorami



Przykład: półfalówka obracająca się pomiędzy polaryzatorami

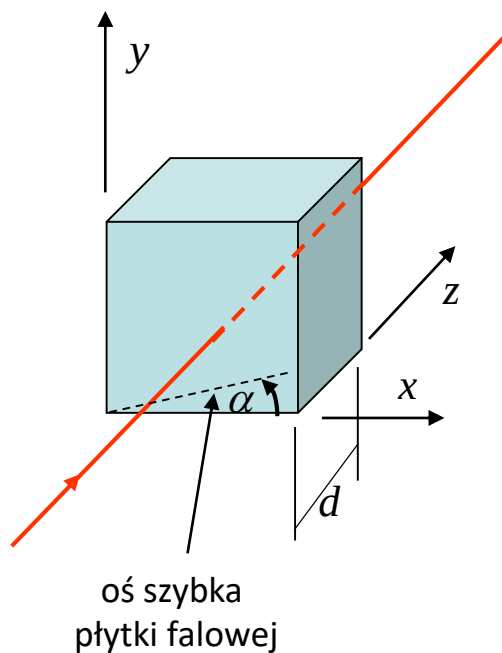
$$\vec{V}_{out} = W_{Py} W_{\Gamma\pi} \vec{V}_{in} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin 2\alpha \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{I_{out}}{I_{in}} = \sin^2 2\alpha$$

kontrola (modulacja) natężenia wiązki

macierze Jonesa, 7

Przykład 4 c.d.



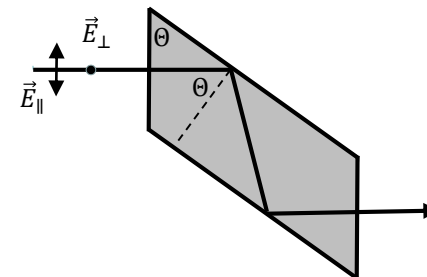
płytką ćwierćfalową: $e^{i\Gamma} = i$

kołowa polaryzacja wejściowa

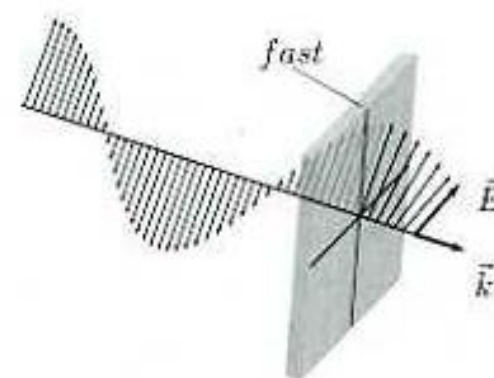
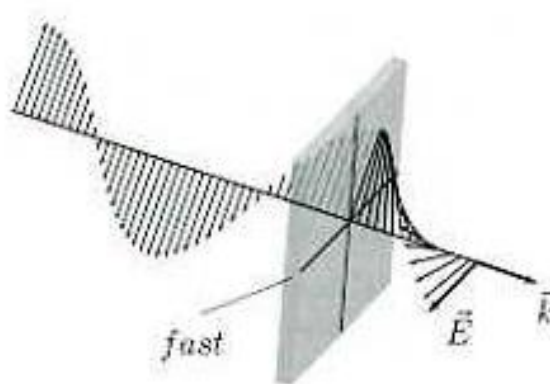
$$\vec{V}_{out} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \mp 1 \end{bmatrix}$$

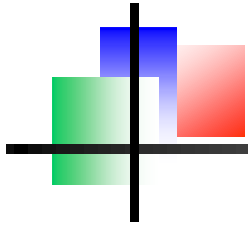
kołowa $\rightarrow$ liniowa po kącie $\pm 45^\circ$ do osi szybkiej płytki

liniowa po kącie $\pm 45^\circ$ do osi szybkiej płytki $\rightarrow$ kołowa



romb Fresnela
wykład 5





macierz koherencji

- Światło spolaryzowane: dokładnie wiemy jak wygląda $\vec{E}(t)$.
- Światło niespolaryzowane: wektor pola elektrycznego fali jest wielkością losową – nie ma przepisu na $E_x(t)$ oraz $E_y(t)$. Posługujemy się funkcjami korelacji.
- Światło częściowo spolaryzowane

macierz koherencji:

$$J = \begin{bmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_x^* E_y \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{bmatrix}$$

symbol $\langle \rangle$ oznacza uśrednianie (?)

Stopień polaryzacji:

$$P = \sqrt{1 - \frac{4 \det J}{(J_{xx} + J_{yy})^2}}$$

$\det J$ – wyznacznik macierzy J

światło niespolaryzowane:

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 \\ 0 & J_{xx} \end{bmatrix}$$

$$\det J = J_{xx}^2$$

$$P = \sqrt{1 - \frac{4 J_{xx}^2}{(2 J_{xx})^2}} = 0$$

światło całkowicie spolaryzowane:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \begin{bmatrix} \cos \Theta \\ \sin \Theta e^{i\phi} \end{bmatrix}$$

$$J = E_0^2 \begin{bmatrix} \cos^2 \Theta & \sin \Theta \cos \Theta e^{-i\phi} \\ \sin \Theta \cos \Theta e^{i\phi} & \sin^2 \Theta \end{bmatrix}$$

$$\det J = 0$$

$$P = 1$$

wektor Stokesa

definicja wektora Stokesa

$$\begin{aligned}S_0 &= J_{xx} + J_{yy} \\S_1 &= J_{xx} - J_{yy} \\S_2 &= J_{xy} + J_{yx} \\S_3 &= i(J_{xy} - J_{yx})\end{aligned}$$

S_0 - natężenie

światło niespolaryzowane

$$\begin{aligned}S_0 &= 2J_{xx} \\S_1 &= S_2 = S_3 = 0\end{aligned}$$

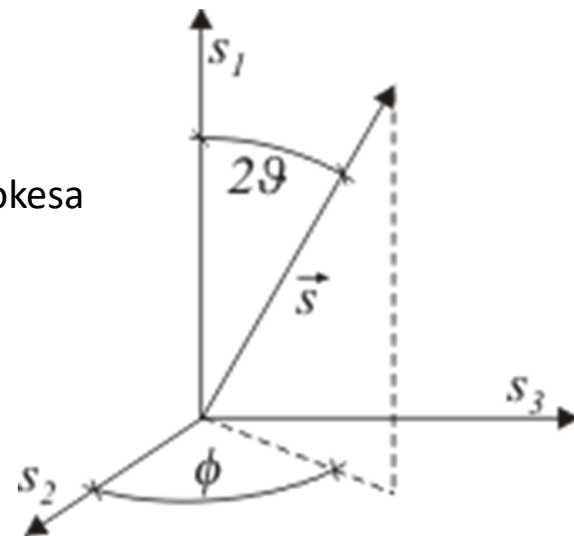
światło całkowicie spolaryzowane

$$J = E_0^2 \begin{bmatrix} \cos^2 \Theta & \sin \Theta \cos \Theta e^{-i\phi} \\ \sin \Theta \cos \Theta e^{i\phi} & \sin^2 \Theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}S_0 &= E_0^2 \\S_1 &= E_0^2 \cos 2\Theta \\S_2 &= E_0^2 \sin 2\Theta \cos \phi \\S_3 &= E_0^2 \sin 2\Theta \sin \phi\end{aligned}$$

znormalizowany wektor Stokesa

$$s_i = \frac{S_i}{S_0}, i = 1, 2, 3$$



sfera Poincare, 1

światło spolaryzowane: $V = \begin{bmatrix} \cos \Theta \\ \sin \Theta e^{i\phi} \end{bmatrix}$

$$s_1 = \cos 2\Theta$$

$$s_2 = \sin 2\Theta \cos \phi$$

$$s_3 = \sin 2\Theta \sin \phi$$

rachunki dają:

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$$

czyli równanie sfery (**sfera Poincare**)

- biegun północny

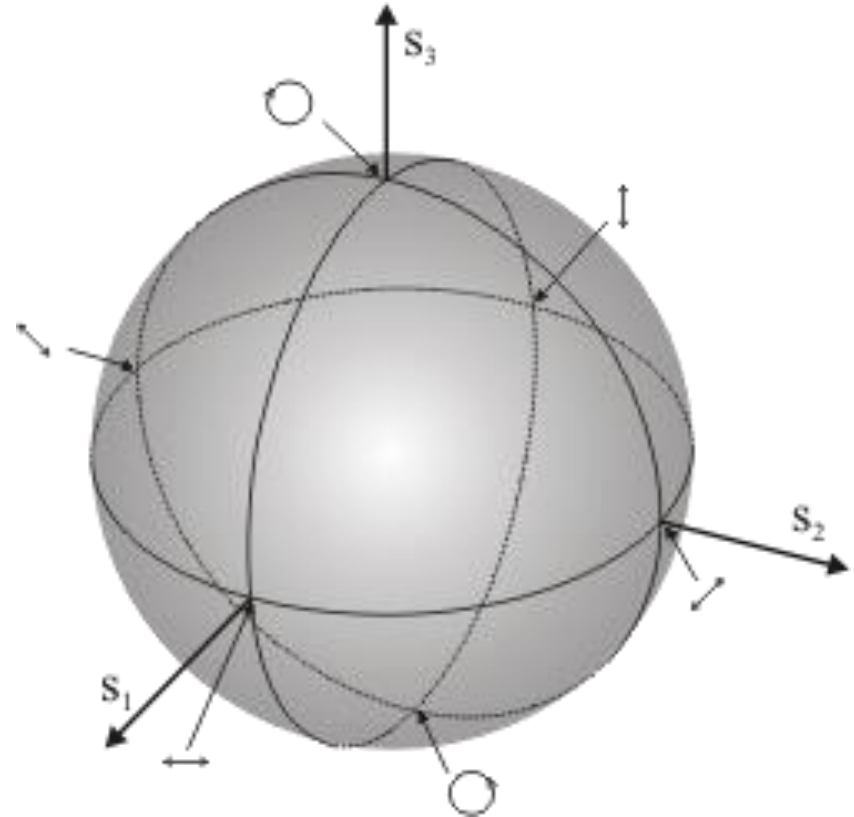
$$s_1 = s_2 = 0 \Leftrightarrow \Theta = \frac{\pi}{4} \text{ oraz } \phi = \pi/4$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = V_P$$

- punkt (1,0,0)

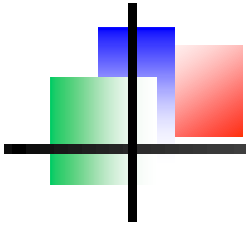
$$s_2 = s_3 = 0 \Leftrightarrow \Theta = 0$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = V_x$$



topografia sfery Poincare:

- bieguny – kołowa
- równik – liniowa
- pomiędzy - eliptyczna

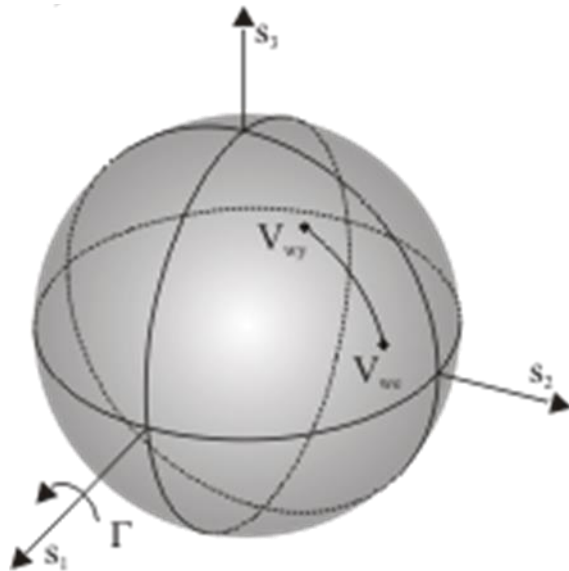


obroty sfery Poincare

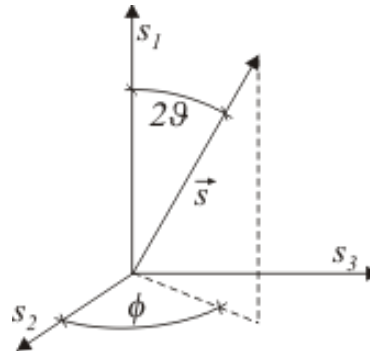
plytka falowa o opóznieniu Γ :

$$V' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Theta \\ \sin \Theta e^{i\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta \\ \sin \Theta e^{i(\phi+\Gamma)} \end{bmatrix}$$

obrót wokół osi s_1 o kąt Γ



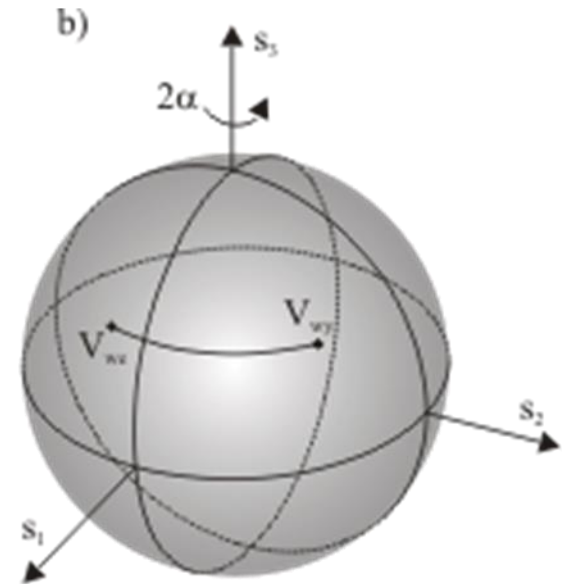
$$V = \begin{bmatrix} \cos \Theta \\ \sin \Theta e^{i\phi} \end{bmatrix}$$



obrót układu odniesienia o kąt α . Rachunek zrobimy dla liniowej polaryzacji wejściowej:

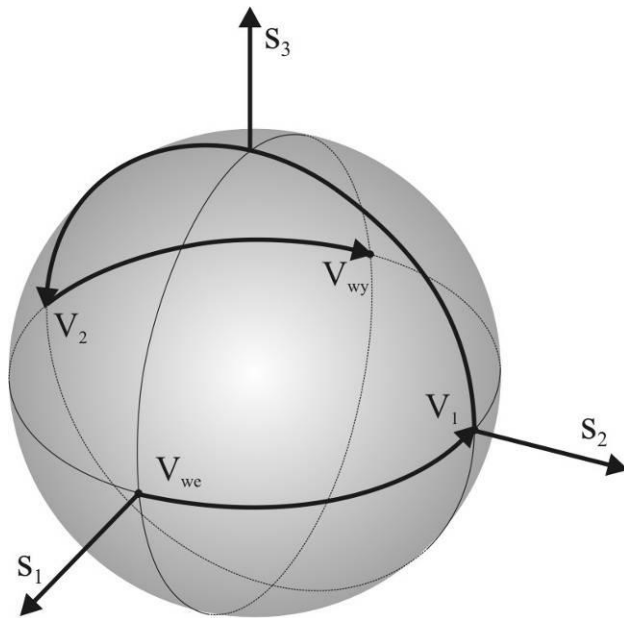
$$V' = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Theta \\ \sin \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Theta - \alpha) \\ \sin(\Theta - \alpha) \end{bmatrix}$$

czyli obrót wokół osi s_3 o kąt -2α . Okazuje się, że jest to ogólne prawo działające dla dowolnej polaryzacji



obroty sfery Poincare - test

Test: pozioma liniowa polaryzacja na wejściu
półfalówka pod kątem 45°



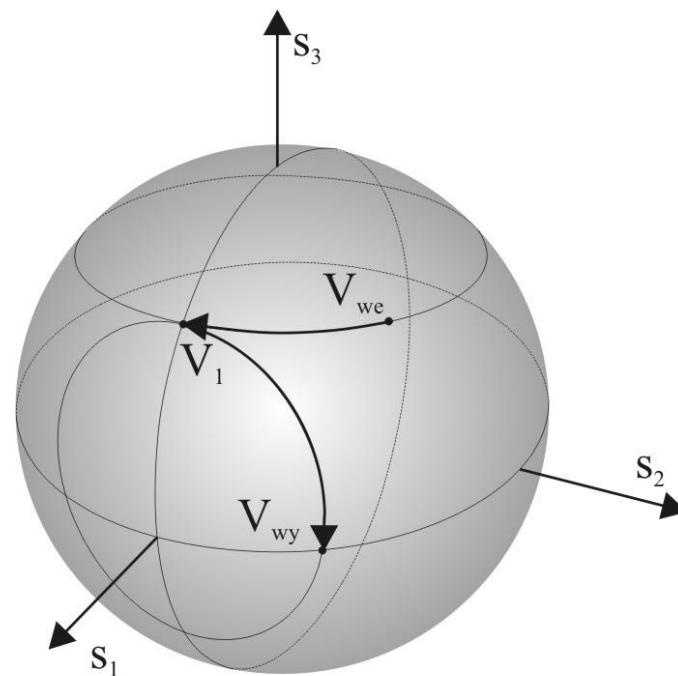
1. zmiana układu odniesienia – obrót układu o kąt 45° = obrót sfery wokół s_3 o kąt -90°
2. płytka półfalowa = obrót sfery wokół osi s_1 o 180°
3. powrót do oryginalnego układu odniesienia = obrót sfery wokół s_3 o kąt 90°

sfera Poincare, 2

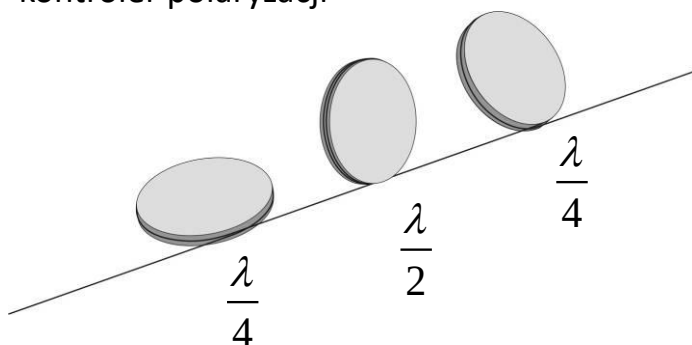
Twierdzenie:

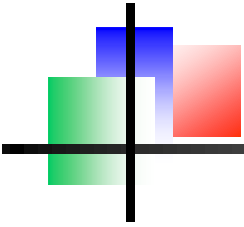
dowolną polaryzację eliptyczną można przeprowadzić w polaryzację liniową przy pomocy jednej ćwierćfalówki.

dowód



zastosowanie – światłowodowy
kontroler polaryzacji



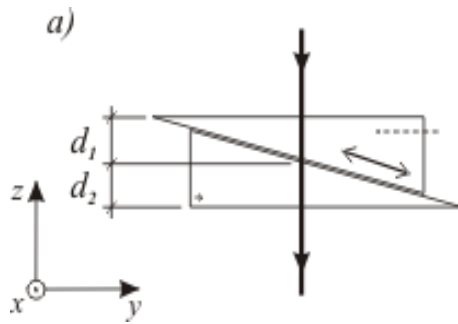


Sfera Poincare, 3

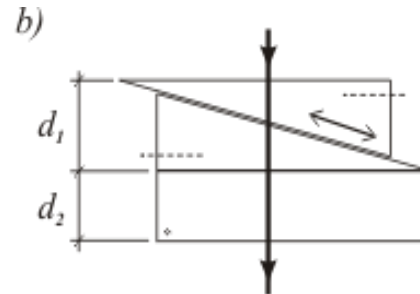
Twierdzenie:

dowolną polaryzację eliptyczną można przeprowadzić w inną dowolnie zadaną polaryzację eliptyczną przy pomocy jednej płytki falowej.

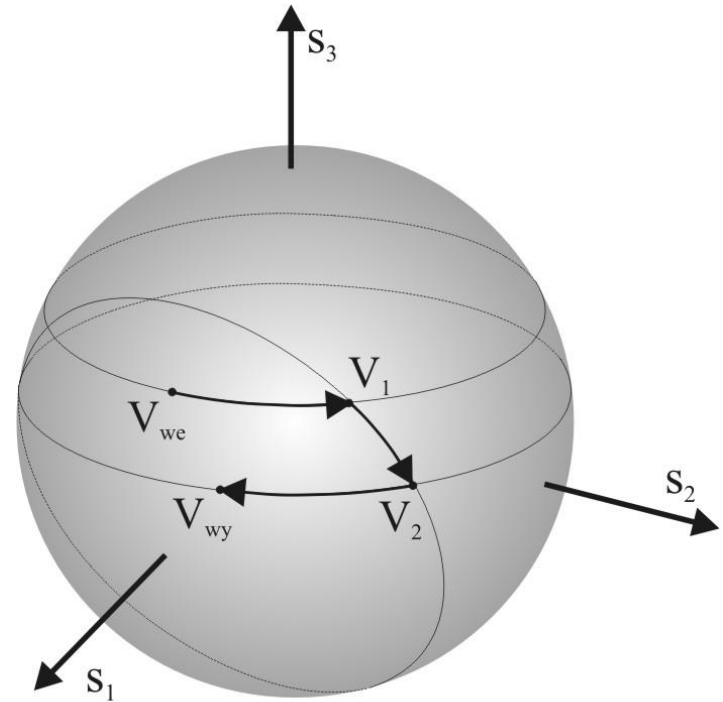
zastosowanie – kompensator polaryzacji

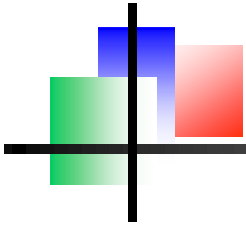


Babinet

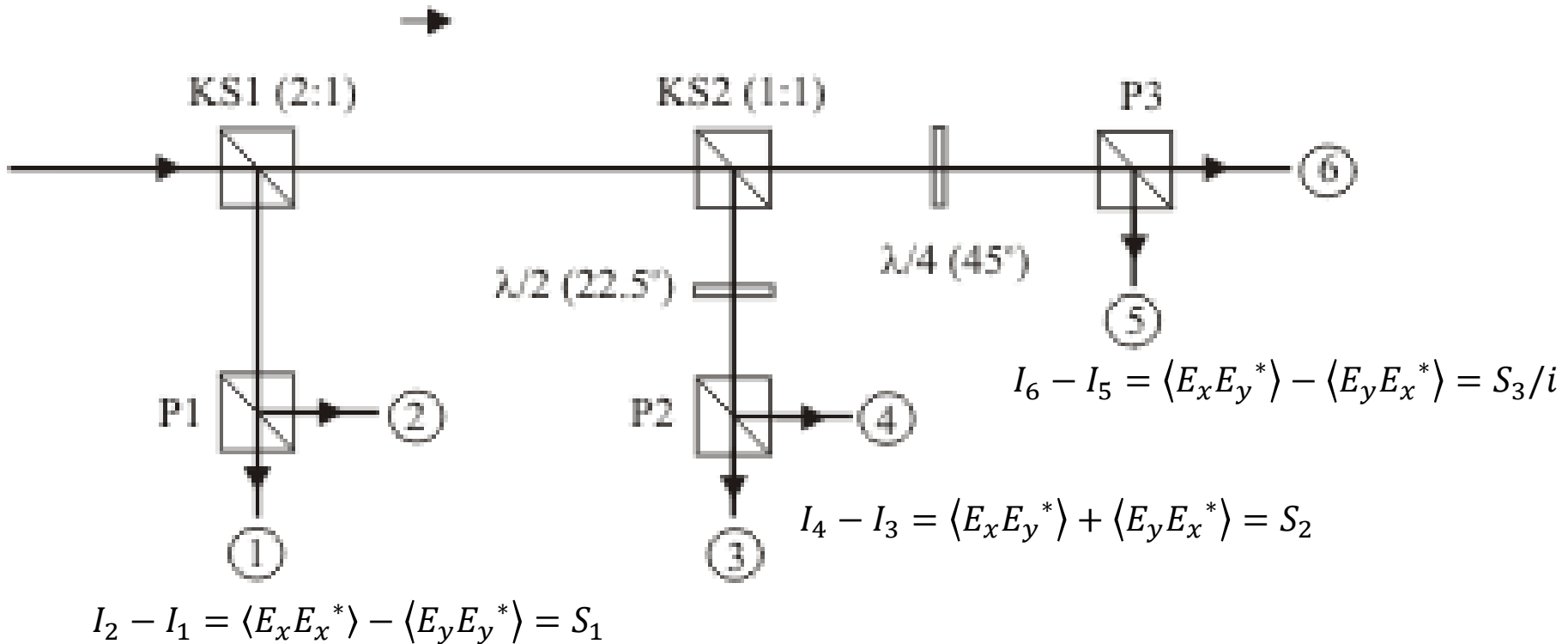


Babinet - Soleil





analizator stanu polaryzacji



KS – niepolaryzująca kostka światłodzieląca

P – polaryzator

$\lambda/2$ – półfalówka

$\lambda/4$ – ćwierćfalówka

1-6 – fotodiody