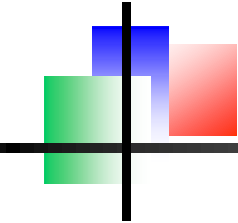


Podstawy Fizyki III

Optyka z elementami fizyki współczesnej

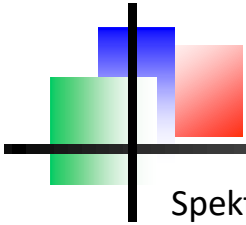
wykład 24, 22.12.2017

wykład:	Czesław Radzewicz
pokazy:	Mateusz Winkowski, Łukasz Zinkiewicz
ćwiczenia:	Radosław Łapkiewicz



Wykład 22 - przypomnienie

- nieliniowe oddziaływanie fali EM z atomami i cząsteczkami
- nieliniowa polaryzacja ośrodka materialnego :
- własności tensorów
- konsekwencje $\chi^{(2)}$ - mieszanie 3 fal:
 - prostowanie optyczne, 2. harmoniczna
 - suma i różnica częstotliwości
- niektóre konsekwencje $\chi^{(3)}$ - mieszanie 4 fal:
 - 3 harmoniczna, nieliniowy współczynnik załamania
- dopasowanie fazowe w procesach nieliniowych – kryształy dwójtómne
- generacja harmonicznego lasera impulsowego
- generatory i wzmacniacze parametryczne
- samo-modulacja fazy, samo-ogniskowanie
- generacja superkontinuum



Promieniowanie ciała doskonale czarnego

Spektralna gęstość energii pola EM w równowadze termodynamicznej z „pudełkiem” w temperaturze T

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$



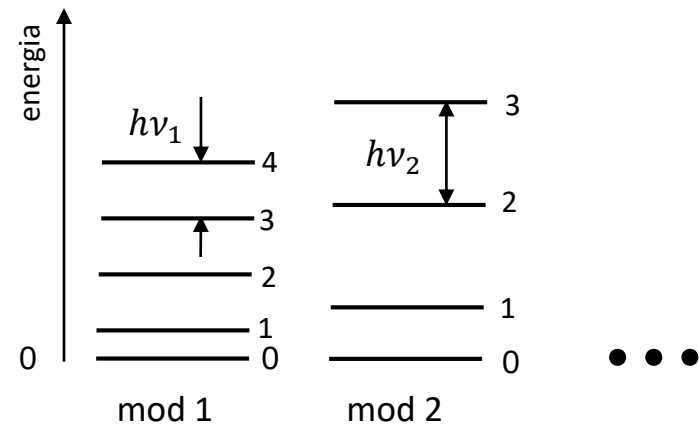
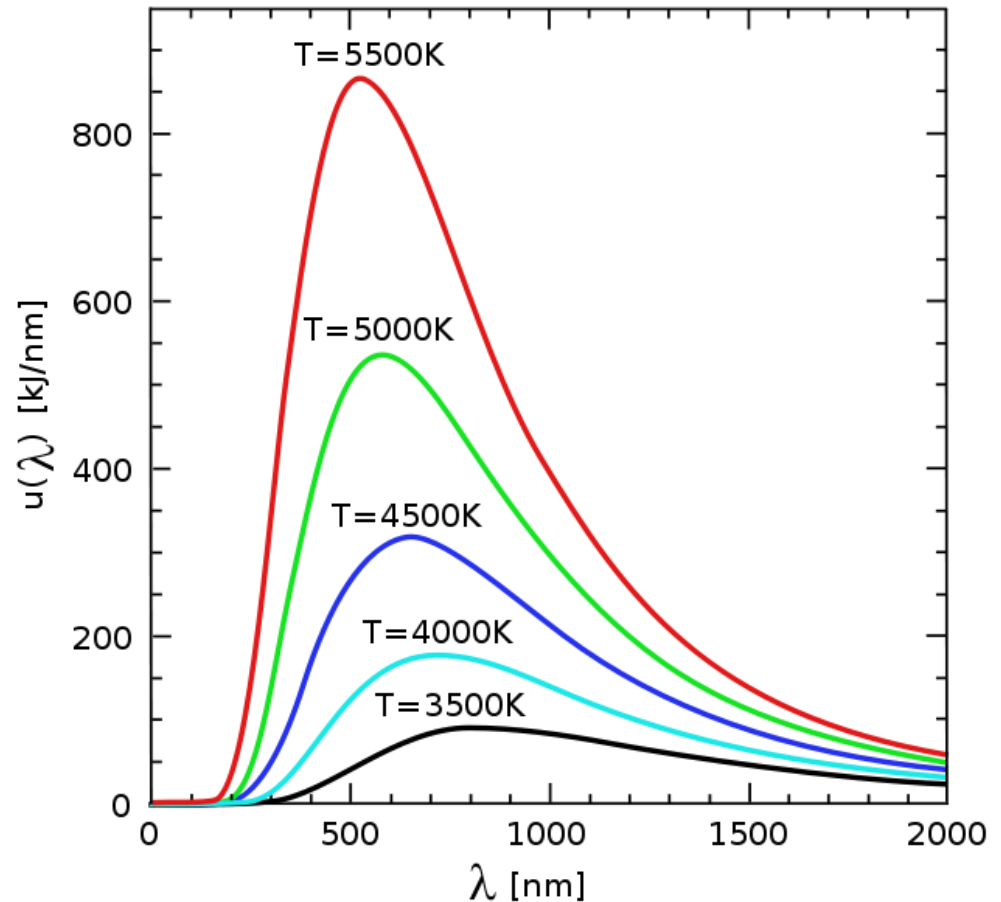
Max Karl Ernst Ludwig Planck
(1858-1947)

Założenie (Planck, 1900):

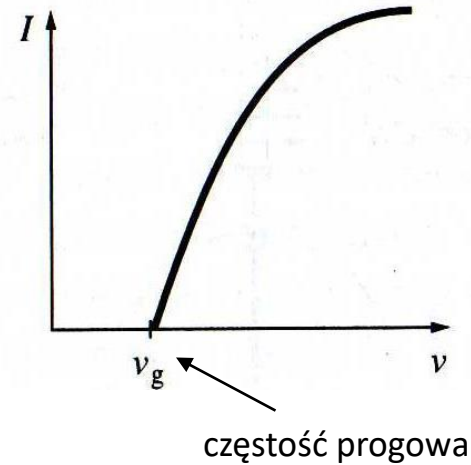
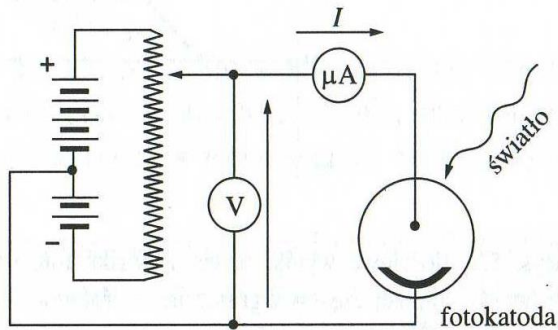
energia modów pola EM
jest skwantowana

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu$$

$h \cong 6.62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ – stała Plancka



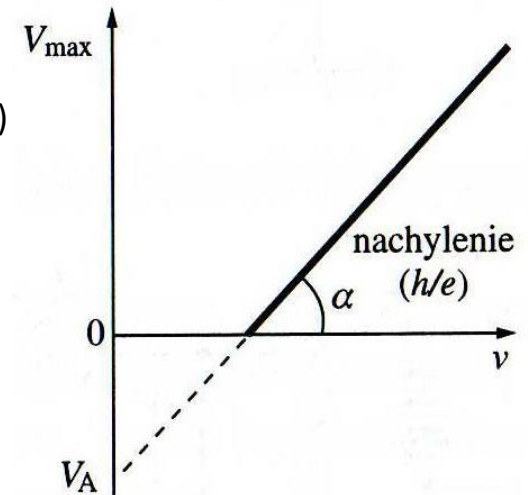
zjawisko fotoelektryczne



Metal	eV_A [eV]	λ_g [nm]
Li	2,46	504
Na	2,28	543
K	2,25	551
Rb	2,13	582
Cs	1,94	639
Cu	4,48	277
Pt	5,36	231

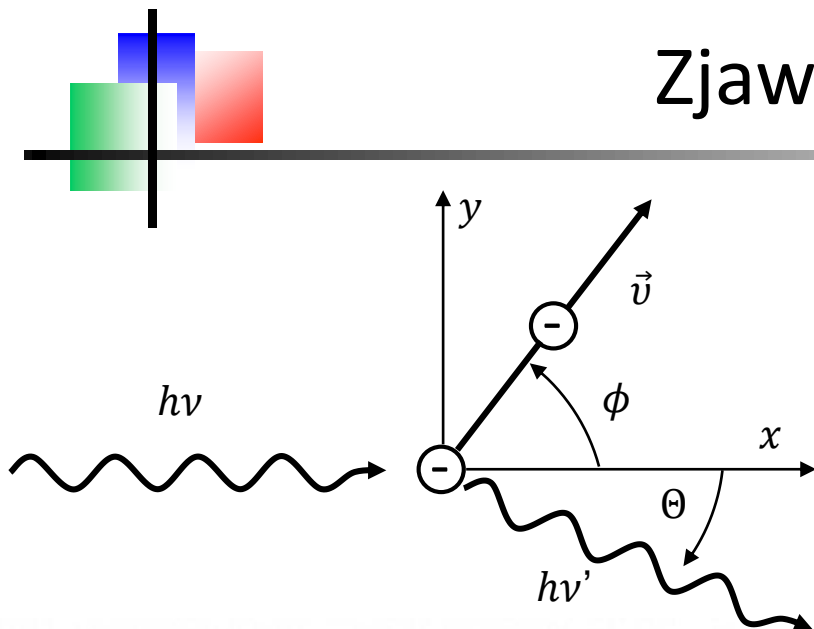
$$\frac{mv^2}{2} = \overset{\substack{\text{praca wyjścia (const.)} \\ \downarrow}}{hv - eV_A}$$

graniczna częstość promieniowania dla $\nu = 0$
 $eV_{max} = h\nu_{min}$



Einstein 1905

Zjawisko Comptona



zachowanie energii

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

zachowanie pędu

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \Theta + mv \sin \phi$$

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \Theta + mv \cos \phi$$

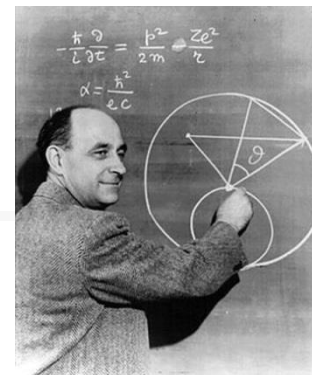
rachunki...

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos \Theta)$$

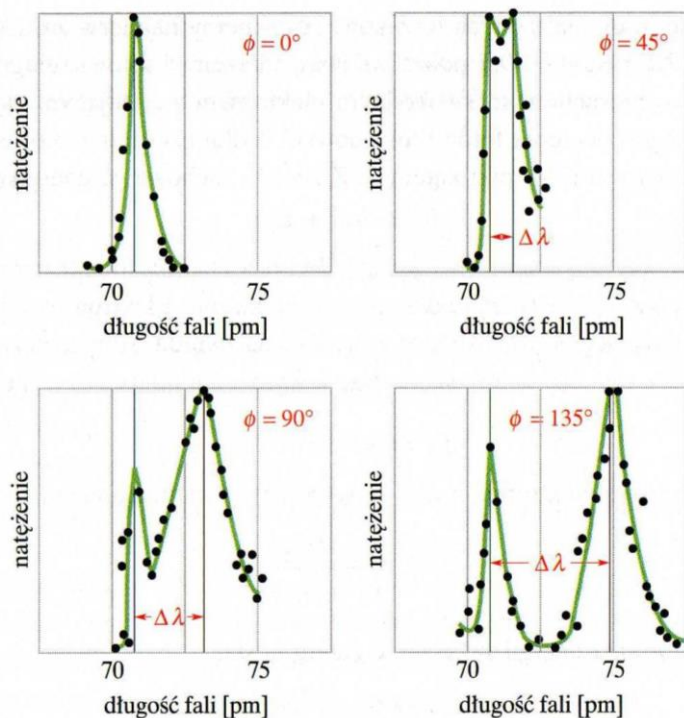
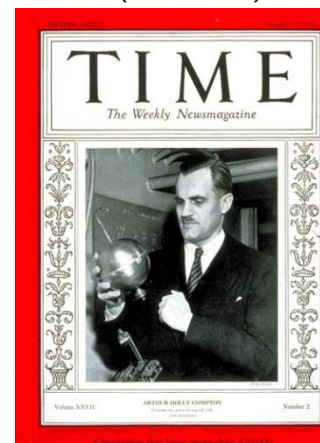
gdzie

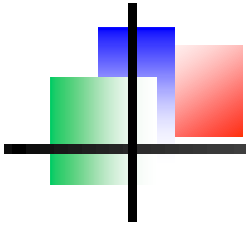
$$\lambda_c = \frac{h}{m_0c} \approx 2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$$

to tzw. przesunięcie komptonowskie



Arthur Holly Compton
(1892-1962)





Kwantyzacja pola EM, wykł. 2

1900 – Max Planck, prom. c. d. c; atomy absorbują i emitują pakiety energii

1903 – J.J. Thomson, granulacja w jonizacji gazu prom. X

1905 – A. Einstein, zjawisko fotoelektryczne; praca wyjścia, energia elektronu

1916 – postulat A. Einsteina: foton ma pęd

1921 – Arthur Compton, rozpraszanie promieni X na elektronach

minimalna porcja energii pola EM – foton

$$\begin{aligned}E &= h\nu = \hbar\omega \\h &\cong 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ \hbar &= h/2\pi\end{aligned}$$

Liczby: $\lambda = 0.5\mu\text{m}$, $1\text{W} \Leftrightarrow 2.5 \times 10^{18}$ fotonów/s

pęd fotonu

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}$$

$\vec{k}$ -wektor falowy

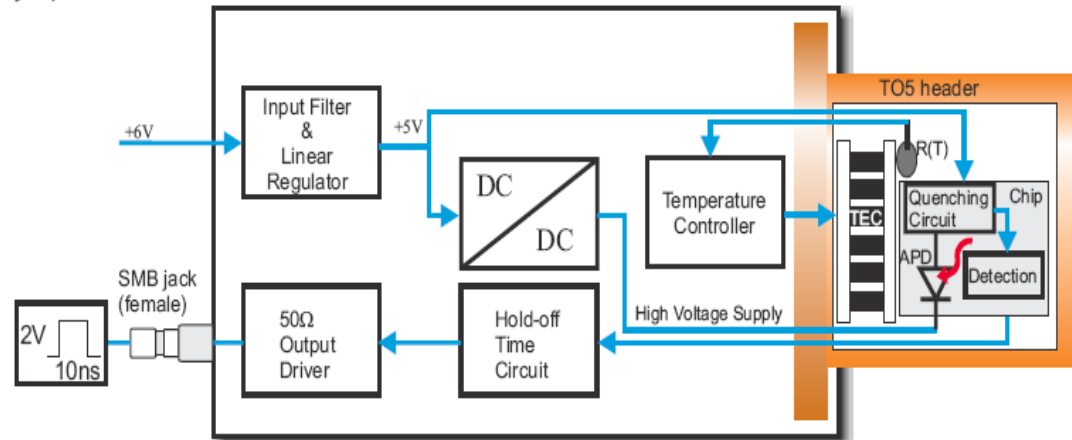
Liczby: $\lambda = 0.5\mu\text{m}$, $p \cong 1.3 \times 10^{-27} \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$

wewnętrzny moment pędu
fotonu (spin)

$$S = \pm\hbar$$

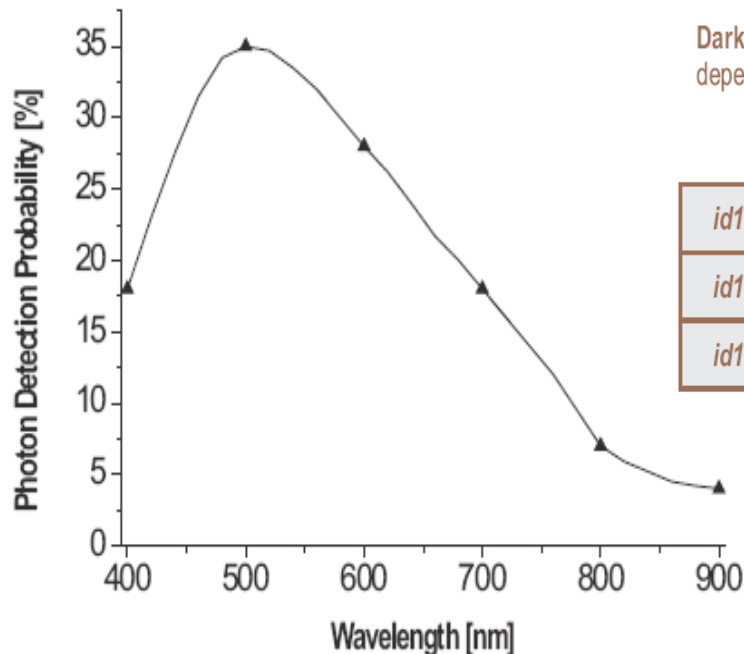
$$\begin{aligned}S &= \hbar && \text{- polaryzacja kołowa P} \\ S &= -\hbar && \text{- polaryzacja kołowa L}\end{aligned}$$

Moduły do liczenia fotonów



Block diagram of the id100 (free-space version).

3 Photon Detection Probability versus λ



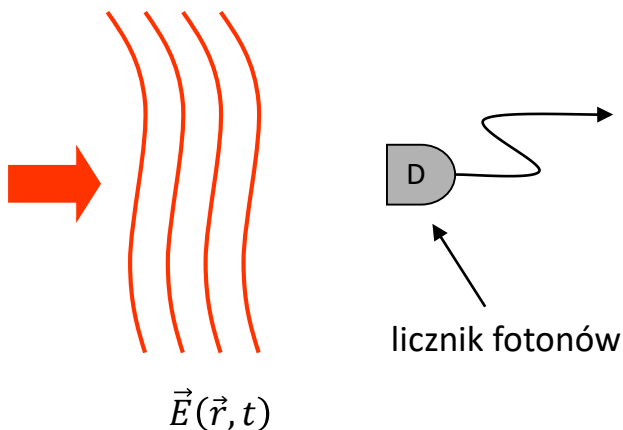
Dark count rate: id Quantique modules are available in two grades: Standard and Ultra-Low Noise, depending on dark count rate specifications.

	Active Area Diameter	TE cooled	Standard	Ultra-Low Noise
<i>id100-20</i>	20 μm	yes	< 60Hz	< 1Hz
<i>id100-50</i>	50 μm	yes	< 80Hz	< 20Hz
<i>id100-MMF50</i>	3	yes		

www.idquantique.com

1 nW dla $\lambda=1 \mu\text{m} \rightarrow 5$ fotonów/ns

gdzie i kiedy jest foton, 1



Nie wiemy. Możemy mówić wyłącznie o prawdopodobieństwie (na jednostkę czasu i jednostkę powierzchni detektora)

$$p(\vec{r}, t) \propto \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |\vec{E}(\vec{r}, t')|^2 dt'$$

Przykład 1: płaska fala monochromatyczna

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

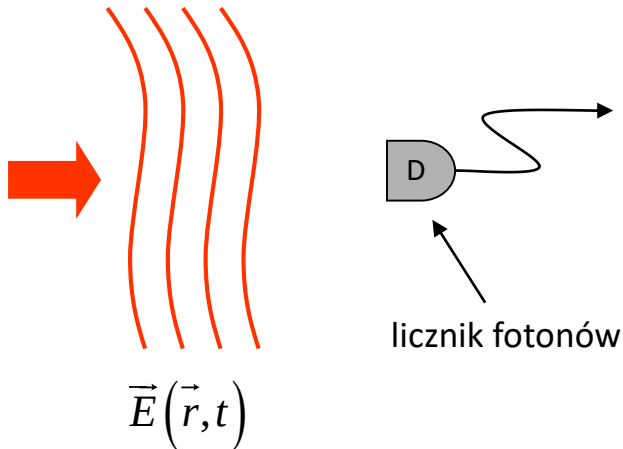
$$p(\vec{r}, t) = \text{const}$$

ale znamy dokładnie energię i pęd fotonu

$$E = \hbar \omega$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

gdzie jest foton, 2



$$p(\vec{r}, t) \propto \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |\vec{E}(\vec{r}, t')|^2 dt'$$

Przykład 2: wiązka gaussowska jako superpozycja fal płaskich monochromatycznych (wykł. 14)

$$\begin{aligned} \tilde{A}(k_x, k_y) &= e^{-\frac{k_x^2 + k_y^2}{\sigma^2}} \\ E(x, y, 0) &= \pi\sigma^2 e^{-\sigma^2 \frac{x^2 + y^2}{4}} = \pi\sigma^2 e^{-\frac{\sigma^2 r^2}{4}} \\ p(x, y, 0, t) &\propto e^{-\sigma^2 \frac{x^2 + y^2}{2}} \end{aligned}$$

niepewności wyznaczenia pędu poprzecznego $\Delta p_{\perp}$ i położenia fotonu Δr możemy opisać przez dyspersję składowej poprzecznej wektora falowego i dyspersję rozkładu natężenia

$$\Delta k_{\perp} = \sqrt{\langle (k_{\perp} - \langle k_{\perp} \rangle)^2 \rangle} = \sigma/2$$

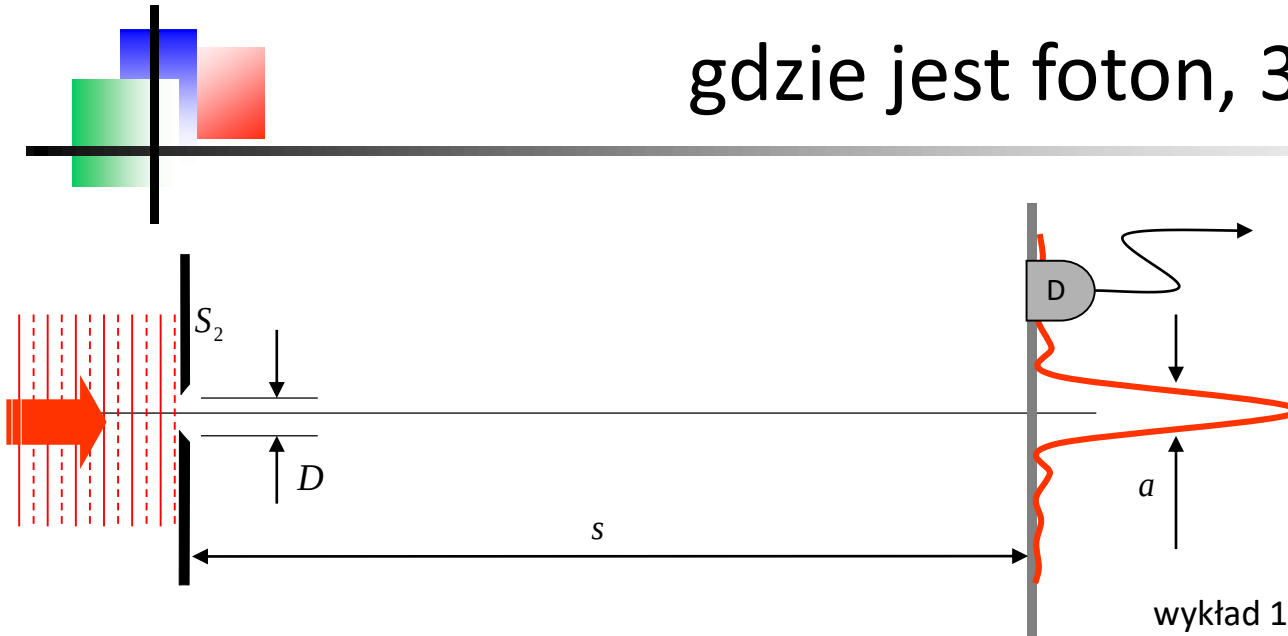
$$\Delta r = \sqrt{\langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle} = 1/\sigma$$

symbol $\langle \rangle$ oznacza uśrednianie po rozkładzie

$$\Delta p_{\perp} = \hbar \Delta k_{\perp} = \hbar \sigma / 2$$

$$\Delta p_{\perp} \Delta r = \hbar / 2$$

gdzie jest foton, 3



Wygodna konwencja:
dzielimy pole EM na mody (np. fale płaskie)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_q A_q e^{i(\vec{k}_q \cdot \vec{r} - \omega_q t)} \hat{e}_q$$

gdzie wersor $\hat{e}_q$ to wersor wyznaczający polaryzację modu
Dla każdego z modów możemy zdefiniować własności fotonów w tym modzie

$$E = \hbar \omega_q$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}_q$$

oraz prawdopodobieństwo znalezienia fotonu w tym modzie

$$p_q \propto |A_q|^2$$

Inny rozkład na mody?

wykład 15:

$$\Delta k_x \cong k \frac{a}{s} \cong \frac{2\pi}{D}$$

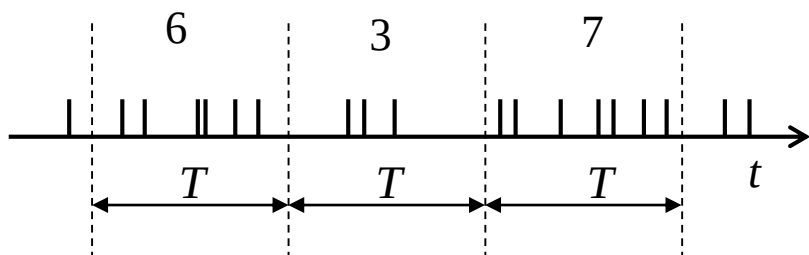
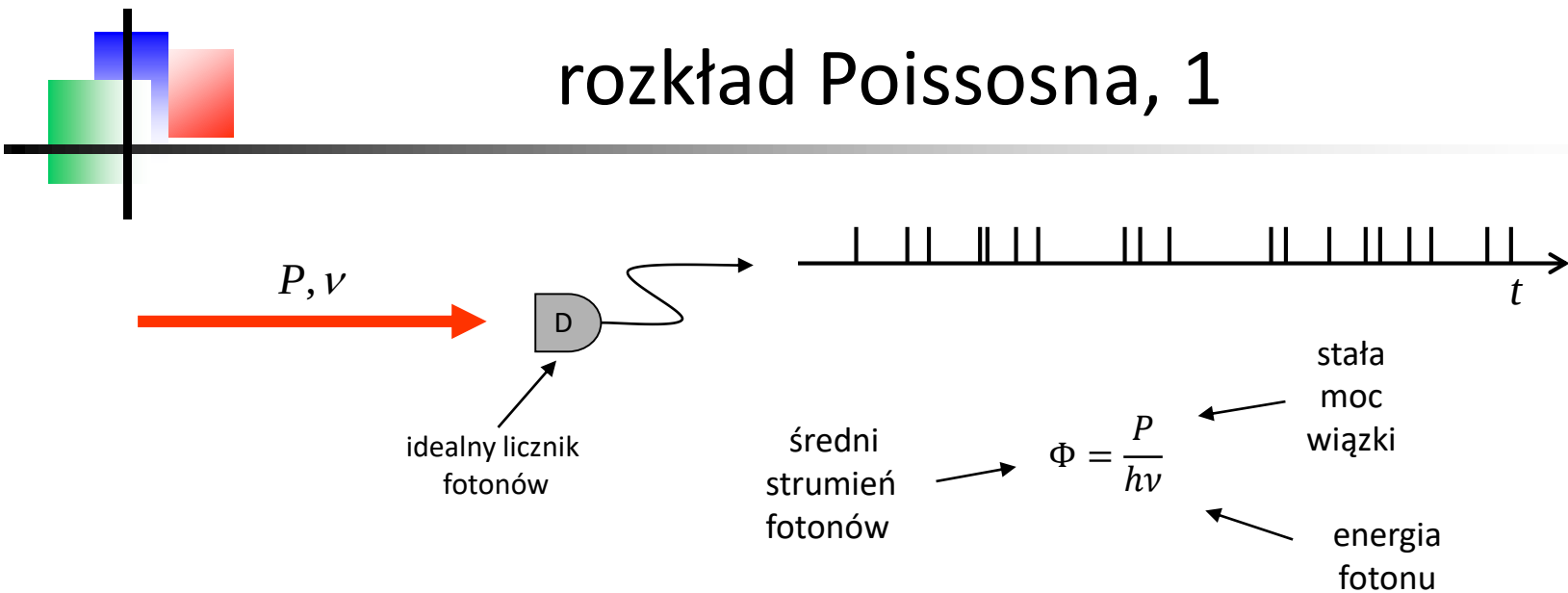
$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{D} \int_{-D/2}^{D/2} x^2 dx} = \sqrt{\frac{D^2}{12}} \cong \frac{D}{3.46}$$

$$\Delta k_x \Delta x \cong \frac{2\pi}{3.46} \cong 2$$

$$\Delta p_x \Delta x \cong 2\hbar$$

generalne prawo: obowiązuje
zasada nieoznaczoności Heisenberga
 $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar/2$

rozkład Poissosna, 1



średnia liczba zliczeń w interwale T

$$\bar{n} = \frac{PT}{h\nu}$$

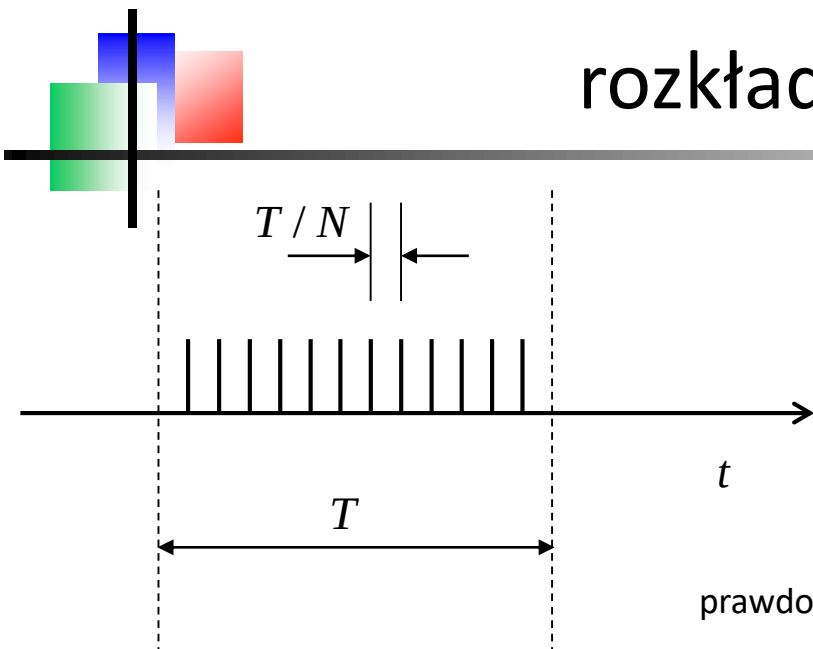
P – moc wiązki światła

Dla $\bar{n} \ll 1$

$$\bar{n} = p_T(1) = \frac{PT}{h\nu}$$

oznacza prawdopodobieństwo kliknięcia detektora w interwale czasowym T

rozkład Poissona, 2



odcinki T/N są tak krótkie, że prawdopodobieństwo znalezienia więcej niż jednego impulsu w każdym z nich jest zerowe:

$$p_{T/N}(1) = p$$

$$p_{T/N}(0) = 1 - p$$

$$p_{T/N}(k) = 0 \text{ dla } k \neq 0, 1.$$

prawdopodobieństwo n zliczeń w interwale T – rozkład dwumianowy

$$p(n) = \frac{N!}{n! (N - n)!} p^n (1 - p)^{N - n}$$

$$p_{T/N}(1) = \frac{\bar{n}}{N}$$

stąd

$$p(n) = \frac{N!}{n! (N - n)!} \left(\frac{\bar{n}}{N}\right)^n \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N - n}$$

W granicy dużych N mamy

$$\frac{N!}{(N - n)! N^n} = \frac{(N - n + 1) \dots (N - 1) N}{N^n} \rightarrow 1$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N - n} = e^{-\bar{n}}$$

ostatecznie

$$p(n) = \frac{(\bar{n})^n e^{-\bar{n}}}{n!}$$

rozkład Poissona

rozkład Poissosna, 3

Własności

$$p(n) = \frac{(\bar{n})^n}{n!} e^{-\bar{n}}$$

Daje

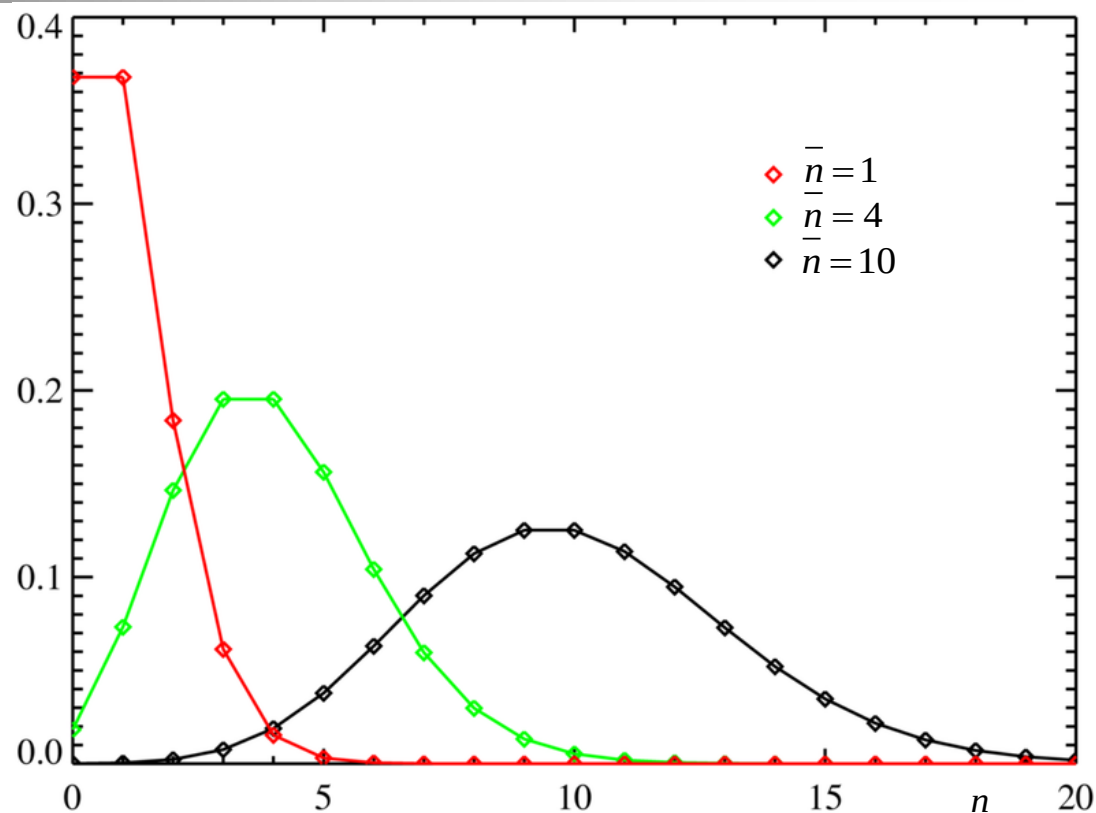
$$\sigma^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \bar{n})^2 p(n) = \bar{n}$$

stosunek sygnał/szum

(ang. Signal to Noise Ratio, SNR)

$$SNR = \frac{\bar{n}}{\sigma} = \sqrt{\bar{n}}$$

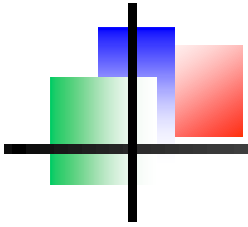
szum śrutowy



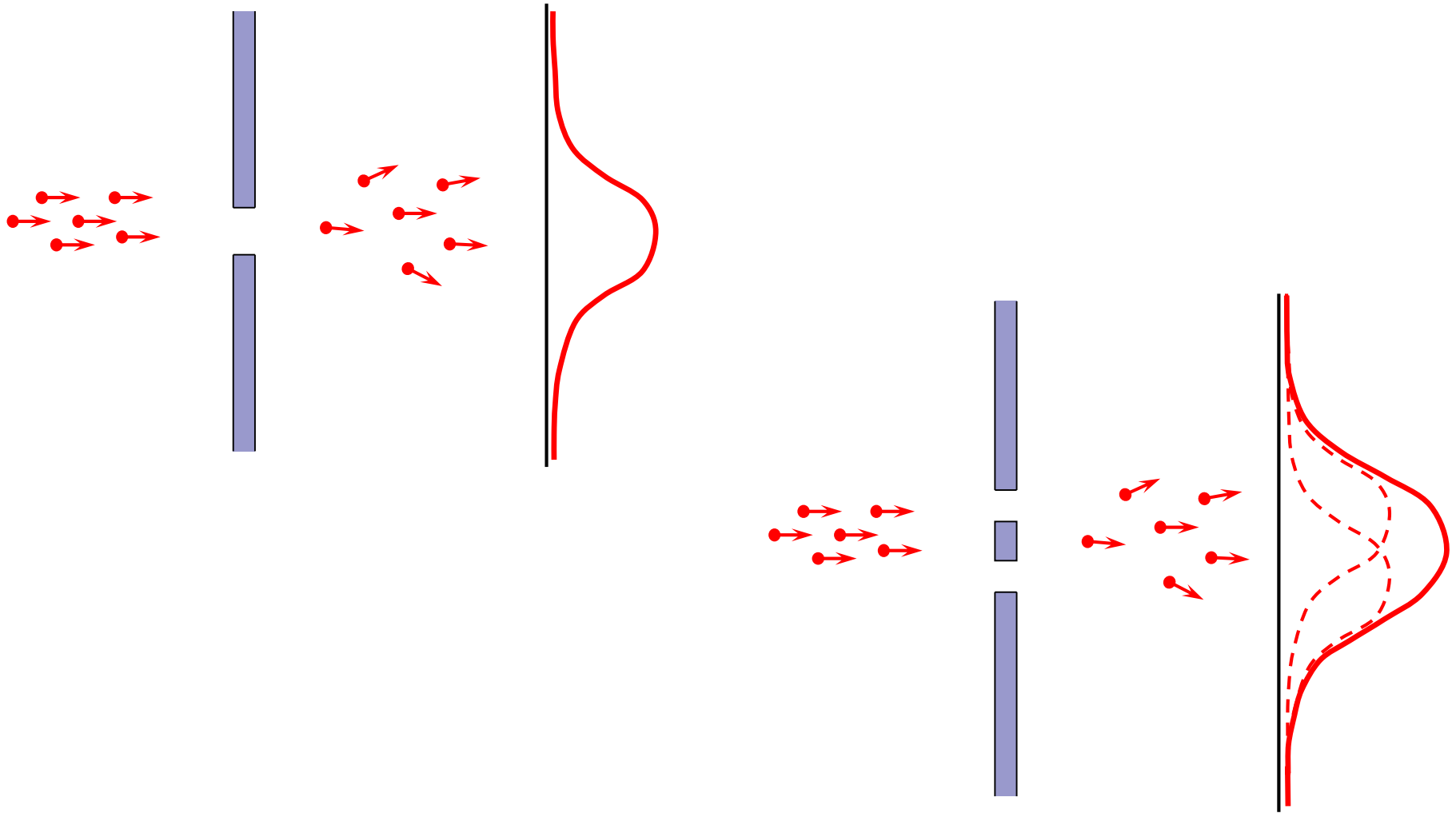
Liczby: laser He-Ne 1 mW, $T=1$ s

$$\bar{n} = \frac{PT}{h\nu} \cong 10^{21}$$

$$SNR \cong 3 \times 10^{10}$$

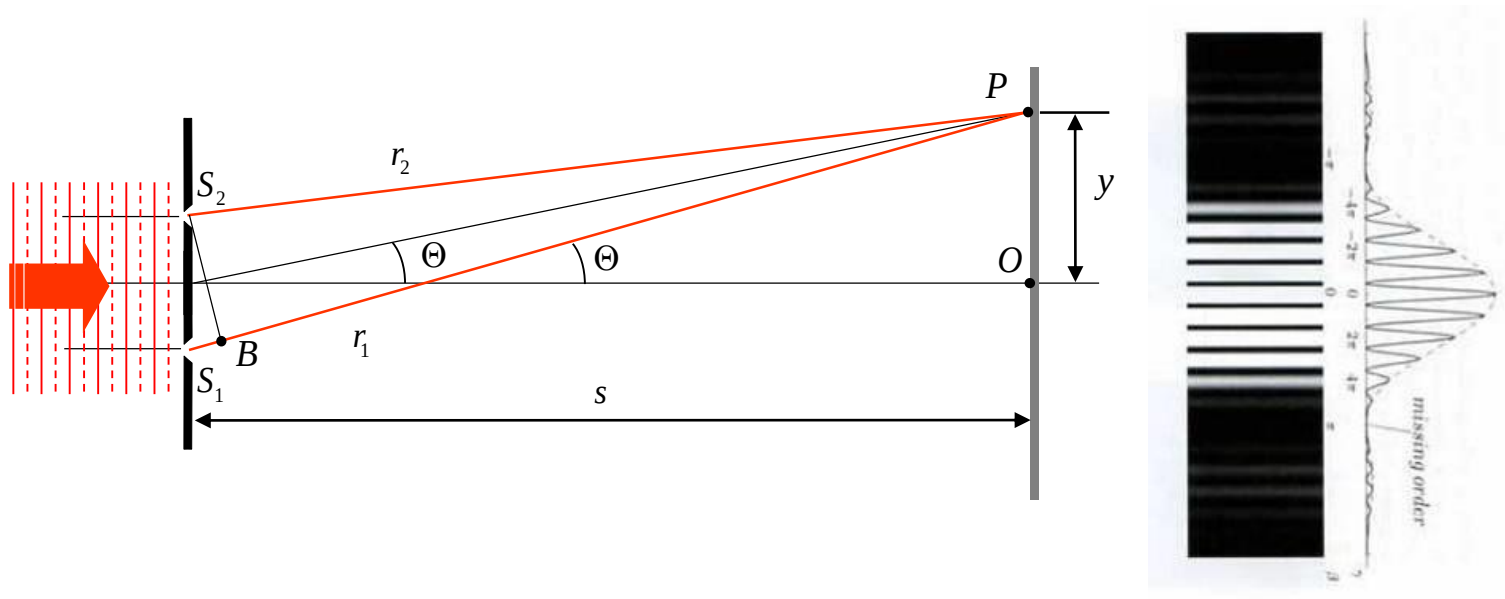


co robią cząstki na szczelinie(ach)?



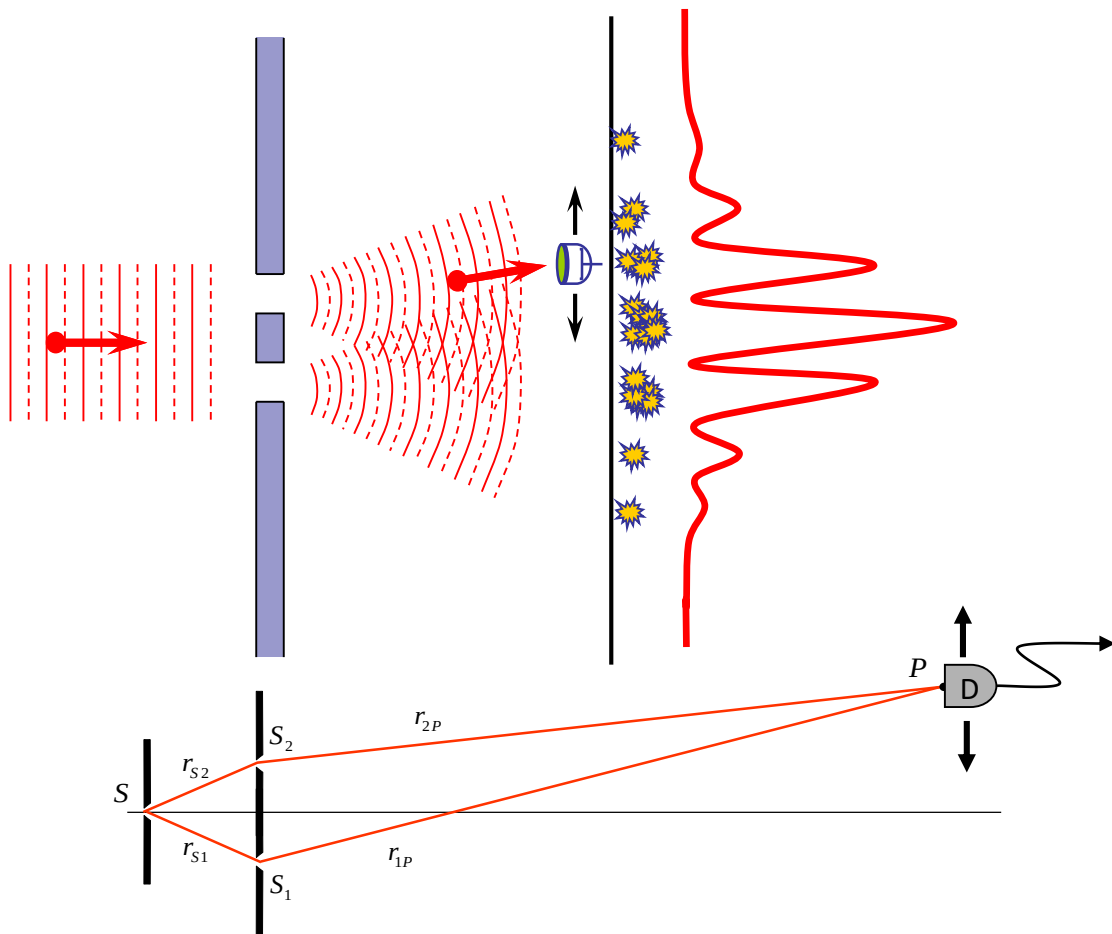
co robią fale? (wykł. 11)

Doświadczenie Younga



$$E(P) = E_1 + E_2$$
$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$
$$\delta = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi(r_1 - r_2)}{\lambda}$$

co naprawdę robią fotony?



Kwantowe „reguły gry”:

1. amplituda prawdopodobieństwa
 $\langle P|S \rangle$
2. superpozycja
 $\langle P|S \rangle = \langle P|S \rangle_1 + \langle P|S \rangle_2$
3. podział na części
 $\langle P|S \rangle_1 = \langle P|S_1 \rangle \langle S_1|S \rangle$
4. Prawdopodobieństwo
 $p = |\langle P|S \rangle|^2 = |\langle P|S \rangle_1 + \langle P|S \rangle_2|^2$

Dla cząstek z niezerową masą spoczynkową

$$\langle \vec{r}_1 | \vec{r}_2 \rangle = \frac{e^{i\vec{p} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) / \hbar}}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

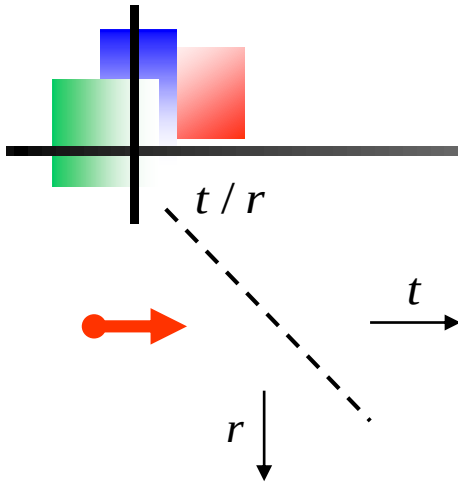
gdzie $\vec{p}$ to pęd cząstki

dla fotonu

$$\langle \vec{r}_1 | \vec{r}_2 \rangle = \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

fale prawdopodobieństwa

stany n-fotonowe + BS



t - amplituda prawdopodobieństwa dla transmisji

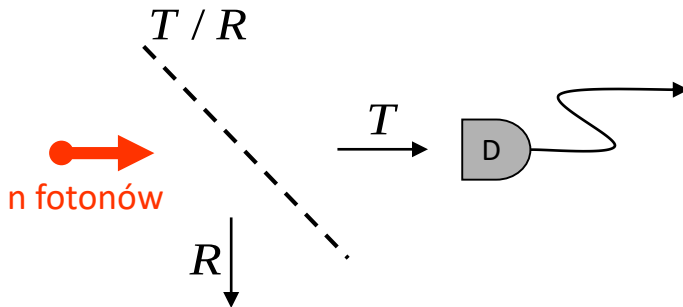
r - amplituda prawdopodobieństwa dla odbicia

$T = |t|^2$ - prawdopodobieństwo transmisji

$R = |r|^2$ - prawdopodobieństwo odbicia

$T = 1 - R$

zdarzenia niezależne - mnożymy prawdopodobieństwa



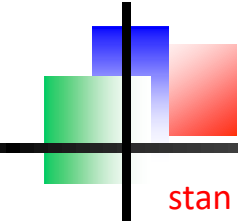
ogólnie dla stanu n-fotonowego:

$$p(m) = \binom{n}{m} T^m R^{n-m} = \binom{n}{m} T^m (1 - T)^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

jeśli na wejściu mamy rozkład $p_0(n)$ to za płytką:

$$p(m) = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} T^m (1 - T)^{n-m} p_0(n), \quad m = 0, 1, 2, \dots, n$$

n	m	kombinacje	$p(m)$
0	0		0
1	0	R	R
	1	T	T
2	0	RR	R^2
	1	RT, TR	$2RT$
	2	TT	T^2
3	0	RRR	R^3
	1	TRR, RTR, RRT	$3R^2T$
	2	RTT, TRT, TTR	$3RT^2$
	3	TTT	T^3



stan koherentny

stan koherentny – idealna wiązka laserowa

Założenie: prawdopodobieństwo zarejestrowania dokładnie n fotonów z modu przestrzennego α jest dane rozkładem Poissona

$$P(n|\alpha) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-\bar{n}} \frac{(\bar{n})^n}{n!}$$

Amplituda prawdopodobieństwa:

$$\langle n|\alpha\rangle = e^{-\bar{n}/2} \frac{(\bar{n})^{n/2}}{\sqrt{n!}}$$

gdzie korzystamy z konwencji

$|\alpha\rangle$ „ket” – stan układu (wektor)

$\langle n|$ „bra” – mierzona wielkość fizyczna – obserwabla (kowiektor)

Bardzo prosty przykład: stan o ustalonej liczbie fotonów, np. 3 to $|3\rangle$

$$P(0|3) = |\langle 0|3\rangle|^2 = 0$$

$$P(1|3) = |\langle 1|3\rangle|^2 = 0$$

$$P(2|3) = |\langle 2|3\rangle|^2 = 0$$

$$P(3|3) = |\langle 3|3\rangle|^2 = 1$$

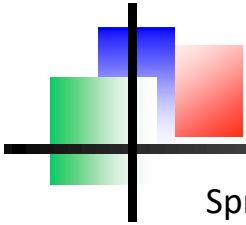
$$P(4|3) = |\langle 4|3\rangle|^2 = 0$$

.....

ogólnie: $P(n|m) = |\langle n|m\rangle|^2 = \delta_{mn}$

Stan α - stan koherentny jako superpozycja stanów n -fotonowych:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\alpha\rangle |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}/2} \frac{(\bar{n})^{n/2}}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$



stan koherentny

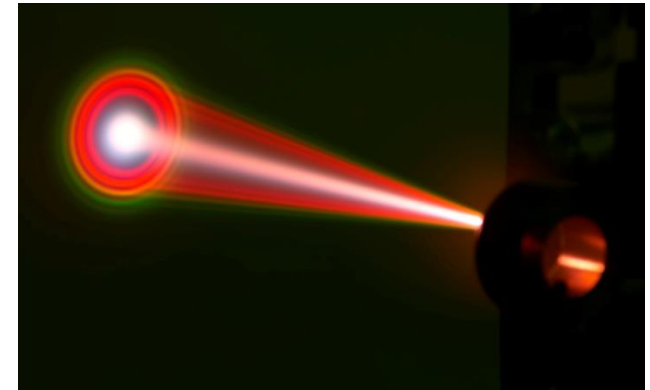
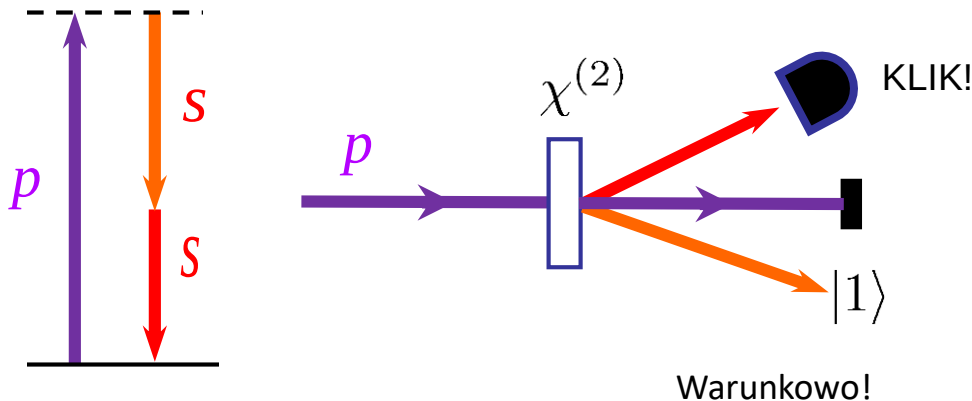
Sprawdzenie – policzmy prawdopodobieństwo zarejestrowania dokładnie m fotonów z modu α :

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}/2} \frac{(\bar{n})^{n/2}}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$P(m|\alpha) = |\langle m|\alpha\rangle|^2 = \left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}/2} \frac{(\bar{n})^{n/2}}{\sqrt{n!}} \langle m|n\rangle \right|^2 = \left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}/2} \frac{(\bar{n})^{n/2}}{\sqrt{n!}} \delta_{mn} \right|^2 = e^{-\bar{n}} \frac{(\bar{n})^m}{m!}$$

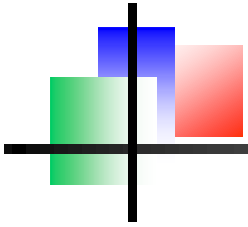
Jak wytworzyć stan o ustalonej liczbie fotonów n ?

Procesy nieliniowe: spontaniczna fluorescencja
parametryczna (parametric downconversion).

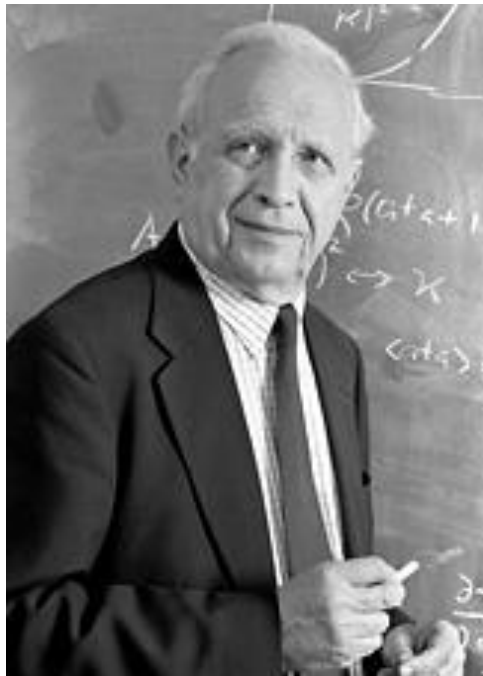


Inne metody: pułpakowane atomy, kropki kwantowe, defekty sieci krystalicznej diamentu...

rekord świata $n = 6$

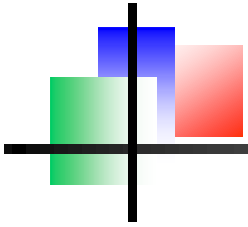


stan koherentny



Roy J. Glauber

The Nobel Prize in Physics 2005 was divided, one half awarded to Roy J. Glauber "*for his contribution to the quantum theory of optical coherence*", the other half jointly

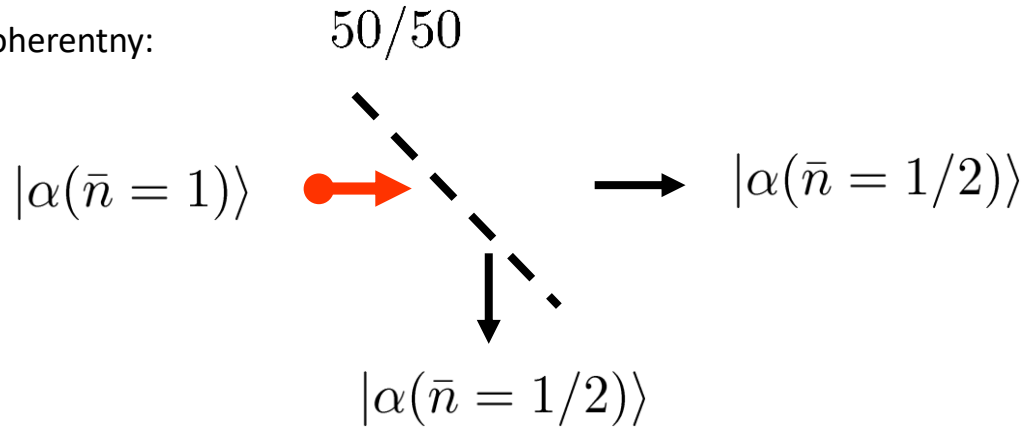


pojedyncze fotony i płytka światłodziela

przypomnienie: $p(m) = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} T^m (1-T)^{n-m} p_0(n)$

rachunki... Poisson => Poisson

Stan koherentny:



Pojedynczy foton:

